数学演習（ベクトルの図形への応用）Ｒ１．１１．２３

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　)

1．3点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ を頂点とする △ABC において，辺 AB を 3 : 2 に内分する点を P，辺 BC を 3 : 4 に外分する点を Q，辺 CA を 4 : 1 に外分する点を R とし，△PQR の重心を G とする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(1)　点 P，Q，R の位置ベクトル　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$

(3)　点 G の位置ベクトル

2．△ABC の内部に点 P があり，$6\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ を満たしている。

(1)　点 P はどのような位置にあるか。

(2)　△PAB，△PBC，△PCA の面積の比を求めよ。

3．(1)　平行四辺形 ABCD において，辺 CD を 2 : 3 に内分する点を E，対角線 BD を 5 : 3 に内分する点を F とする。3 点 A，F，E は一直線上にあることを証明せよ。

(2)　△ABC の辺 BC，CA，AB をそれぞれ $m:n$ $(m>0,\ n>0)$ に内分する点を P，Q，R とするとき，△ABC と △PQR の重心は一致することを示せ。

4．$\triangle$OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。辺 OA を 3 : 2 に内分する点を C，辺 OB を 3 : 4 に内分する点を D，線分 AD と BC との交点を P とし，直線 OP と辺 AB との交点を Q とする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$

5．平面上に $\triangle$OAB があり，OA＝5，OB＝6，AB＝7 とする。また，$\triangle$OAB の垂心を H とする。

(1) $\cos\angle\mathrm{AOB}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

6．$\triangle$ABC において，AB＝8，BC＝7，CA＝5 とし，内心を I とする。$\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ。

数学演習（ベクトルの図形への応用）R１．１１．２３

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　　）

1．3 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ を頂点とする △ABC において，辺 AB を 3 : 2 に内分する点を P，辺 BC を 3 : 4 に外分する点を Q，辺 CA を 4 : 1 に外分する点を R とし，△PQR の重心を G とする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(1)　点 P，Q，R の位置ベクトル　　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$

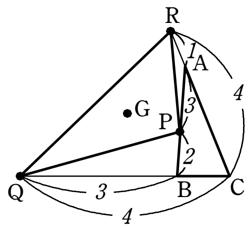
(3)　点 G の位置ベクトル

解答　(1)　順に　$\dfrac{2}{5}\vec{a}+\dfrac{3}{5}\vec{b}$，$4\vec{b}-3\vec{c}$，$\dfrac{4}{3}\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{c}$　　(2)　$-\dfrac{2}{5}\vec{a}+\dfrac{17}{5}\vec{b}-3\vec{c}$

(3)　$\dfrac{26}{45}\vec{a}+\dfrac{23}{15}\vec{b}-\dfrac{10}{9}\vec{c}$

解説

P$(\vec{p})$，Q$(\vec{q})$，R$(\vec{r})$，G$(\vec{g})$ とする。



(1)　$\vec{p}=\dfrac{2\vec{a}+3\vec{b}}{3+2}=\dfrac{2}{5}\vec{a}+\dfrac{3}{5}\vec{b}$

$\vec{q}=\dfrac{4\vec{b}-3\vec{c}}{-3+4}=4\vec{b}-3\vec{c}$

$\vec{r}=\dfrac{-\vec{c}+4\vec{a}}{4-1}=\dfrac{4}{3}\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{c}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{q}-\vec{p}$

$=(4\vec{b}-3\vec{c})-\left(\dfrac{2}{5}\vec{a}+\dfrac{3}{5}\vec{b}\right)=-\dfrac{2}{5}\vec{a}+\dfrac{17}{5}\vec{b}-3\vec{c}$

(3)　$\vec{g}=\dfrac{\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}}{3}$

$=\dfrac{1}{3}\left\{\left(\dfrac{2}{5}\vec{a}+\dfrac{3}{5}\vec{b}\right)+(4\vec{b}-3\vec{c})+\left(\dfrac{4}{3}\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{5}+\dfrac{4}{3}\right)\vec{a}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{5}+4\right)\vec{b}+\dfrac{1}{3}\left(-3-\dfrac{1}{3}\right)\vec{c}$

$=\dfrac{26}{45}\vec{a}+\dfrac{23}{15}\vec{b}-\dfrac{10}{9}\vec{c}$

2．△ABC の内部に点 P があり，$6\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ を満たしている。

(1)　点 P はどのような位置にあるか。

(2)　△PAB，△PBC，△PCA の面積の比を求めよ。

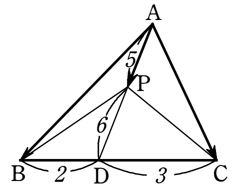
解答　(1)　辺 BC を 2 : 3 に内分する点を D とすると，点 P は線分 AD を 5 : 6 に内分する位置

(2)　2 : 6 : 3

解説

(1)　等式を変形すると

$-6\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+2(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=\vec{0}$



よって　$11\overrightarrow{\mathrm{AP}}=3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{5}{11}\cdot\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5}$

辺 BC を 2 : 3 に内分する点を D とすると

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{5}{11}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

したがって，辺 BC を 2 : 3 に内分する点を D とすると，点 P は線分 AD を 5 : 6 に内分する位置にある。

(2)　△ABC の面積を S とすると

$\triangle\mathrm{PAB}=\dfrac{5}{11}\cdot\triangle\mathrm{ABD}=\dfrac{5}{11}\cdot\dfrac{2}{5}\cdot\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{2}{11}S$

$\triangle\mathrm{PBC}=\dfrac{6}{11}\cdot\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{6}{11}S$

$\triangle\mathrm{PCA}=\dfrac{5}{11}\cdot\triangle\mathrm{ACD}=\dfrac{5}{11}\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{3}{11}S$

ゆえに　$\triangle\mathrm{PAB}:\triangle\mathrm{PBC}:\triangle\mathrm{PCA}=\dfrac{2}{11}S:\dfrac{6}{11}S:\dfrac{3}{11}S=2:6:3$

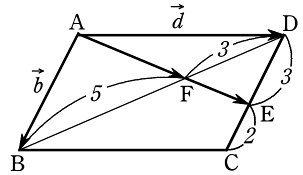
3．(1)　平行四辺形 ABCD において，辺 CD を 2 : 3 に内分する点を E，対角線 BD を 5 : 3 に内分する点を F とする。3 点 A，F，E は一直線上にあることを証明せよ。

(2)　△ABC の辺 BC，CA，AB をそれぞれ $m:n$ $(m>0,\ n>0)$ に内分する点を P，Q，R とするとき，△ABC と △PQR の重心は一致することを示せ。

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とすると



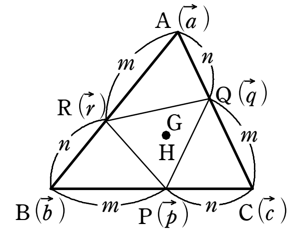
$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\vec{d}+\dfrac{3}{5}\vec{b}=\dfrac{3\vec{b}+5\vec{d}}{5}$

$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+5\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{5+3}=\dfrac{3\vec{b}+5\vec{d}}{8}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\dfrac{5}{8}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$

ゆえに，3 点 A，F，E は一直線上にある。

(2)　A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$，P$(\vec{p})$，Q$(\vec{q})$，R$(\vec{r})$ とし，△ABC，△PQR の重心をそれぞれ G$(\vec{g})$，H$(\vec{h})$ とすると　$\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$　…… ①



また　$\vec{p}=\dfrac{n\vec{b}+m\vec{c}}{m+n}$，$\vec{q}=\dfrac{n\vec{c}+m\vec{a}}{m+n}$，$\vec{r}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$

ゆえに　$\vec{h}=\dfrac{\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}}{3}$

$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{n\vec{b}+m\vec{c}}{m+n}+\dfrac{n\vec{c}+m\vec{a}}{m+n}+\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}\right)$

$=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{(m+n)(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})}{m+n}$

$=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$　…… ②

①，② から　$\vec{g}=\vec{h}$

よって，点 G と点 H は一致するから，△ABC と △PQR の重心は一致する。

4．△OAB において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。辺 OA を 3：2 に内分する点を C，辺 OB を 3：4 に内分する点を D，線分 AD と BC との交点を P とし，直線 OP と辺 AB との交点を Q とする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{OP}$　　　(2)　$\overrightarrow{OQ}$

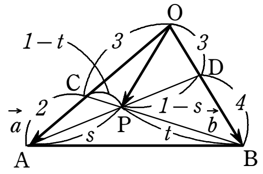
解答　(1)　$\overrightarrow{OP}=\frac{6}{13}\vec{a}+\frac{3}{13}\vec{b}$　　(2)　$\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

解説

(1)　AP：PD$=s$：$(1-s)$，BP：PC$=t$：$(1-t)$ とすると

$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD}=(1-s)\vec{a}+\frac{3}{7}s\vec{b}$,

$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OC}+(1-t)\overrightarrow{OB}=\frac{3}{5}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$



よって　$(1-s)\vec{a}+\frac{3}{7}s\vec{b}=\frac{3}{5}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから　$1-s=\frac{3}{5}t$，$\frac{3}{7}s=1-t$

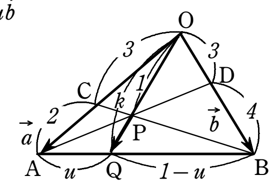
これを解いて　$s=\frac{7}{13}$，$t=\frac{10}{13}$　　したがって　$\overrightarrow{OP}=\frac{6}{13}\vec{a}+\frac{3}{13}\vec{b}$

(2)　AQ：QB$=u$：$(1-u)$ とすると　$\overrightarrow{OQ}=(1-u)\vec{a}+u\vec{b}$

また，点 Q は直線 OP 上にあるから，$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}$

(k は実数) とすると，(1) の結果から

$\overrightarrow{OQ}=k\left(\frac{6}{13}\vec{a}+\frac{3}{13}\vec{b}\right)=\frac{6}{13}k\vec{a}+\frac{3}{13}k\vec{b}$



よって　$(1-u)\vec{a}+u\vec{b}=\frac{6}{13}k\vec{a}+\frac{3}{13}k\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから　$1-u=\frac{6}{13}k$，$u=\frac{3}{13}k$

これを解いて　$k=\frac{13}{9}$，$u=\frac{1}{3}$　　したがって　$\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

5．平面上に △OAB があり，OA＝5，OB＝6，AB＝7 とする。また，△OAB の垂心を H とする。

(1)　cos∠AOB を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

解答　(1)　$\frac{1}{5}$　　(2)　$\overrightarrow{OH}=\frac{5}{24}\vec{a}+\frac{19}{144}\vec{b}$

解説

(1)　余弦定理から　$\cos\angle AOB=\frac{5^2+6^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 6}=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$

(2)　(1) から　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle AOB=5\cdot 6\cdot\frac{1}{5}=6$

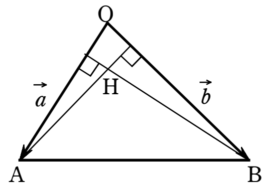
△OAB は直角三角形でないから，垂心 H は 2 点 A，B と一致することはない。

H は垂心であるから　OA⊥BH，OB⊥AH

$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}$ (s，t は実数) とする。

OA⊥BH より $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BH}=0$ であるから

$\vec{a}\cdot\{s\vec{a}+(t-1)\vec{b}\}=0$



よって　$s|\vec{a}|^2+(t-1)\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

ゆえに　$25s+6(t-1)=0$

すなわち　$25s+6t=6$　……①

また，OB⊥AH より $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AH}=0$ であるから

$\vec{b}\cdot\{(s-1)\vec{a}+t\vec{b}\}=0$

よって　$(s-1)\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0$

ゆえに　$6(s-1)+36t=0$　　すなわち　$s+6t=1$　……②

①，② から　$s=\frac{5}{24}$，$t=\frac{19}{144}$

したがって　$\overrightarrow{OH}=\frac{5}{24}\vec{a}+\frac{19}{144}\vec{b}$

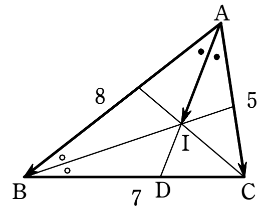
6．△ABC において，AB＝8，BC＝7，CA＝5 とし，内心を I とする。$\overrightarrow{AI}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表せ。

解答　$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

解説

△ABC の ∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とすると

BD：DC＝AB：AC＝8：5



よって　$\overrightarrow{AD}=\frac{5\overrightarrow{AB}+8\overrightarrow{AC}}{13}$

また　$BD=\frac{8}{13}\cdot 7=\frac{56}{13}$

△ABD において，∠B の二等分線と辺 AD の交点が I であるから

AI：ID＝BA：BD＝8：$\frac{56}{13}$＝13：7

よって　$\overrightarrow{AI}=\frac{13}{20}\overrightarrow{AD}=\frac{13}{20}\cdot\frac{5\overrightarrow{AB}+8\overrightarrow{AC}}{13}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$