数学演習（ベクトルの内積）Ｒ１．１１．２２　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1．$\angle A=90^\circ$，$AB=5$，$AC=4$ の三角形において，次の内積を求めよ。

(1) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$　　(2) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}$　　(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}$

2．次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積と，そのなす角 θ を求めよ。

(1) $\vec{a}=(-1,\ 1)$，$\vec{b}=(\sqrt{3}-1,\ \sqrt{3}+1)$　　(2) $\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ -3)$

3．(1) $\vec{p}=(-3,\ -4)$ と $\vec{q}=(a,\ -1)$ のなす角が 45° のとき，定数 a の値を求めよ。

(2) $\vec{a}=(1,\ -\sqrt{3})$ とのなす角が 120°，大きさが $2\sqrt{10}$ であるベクトル $\vec{b}$ を求めよ。

4．(1) 2つのベクトル $\vec{a}=(x-1,\ 3)$，$\vec{b}=(1,\ x+1)$ が垂直になるような x の値を求めよ。

(2) ベクトル $\vec{a}=(2,\ 1)$ に垂直で，大きさ $\sqrt{10}$ のベクトル $\vec{u}$ を求めよ。

5．(1) 等式 $|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$ を証明せよ。

(2) $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$ で，$\vec{a}-\vec{b}$ と $2\vec{a}+5\vec{b}$ が垂直であるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

6．ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について $|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}$ であるとき

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。

(2) ベクトル $2\vec{a}-3\vec{b}$ の大きさを求めよ。

(3) ベクトル $\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさが最小となるように実数 t の値を定め，そのときの最小値を求めよ。

7．k は実数の定数とする。$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$ とするとき，$|k\vec{a}+t\vec{b}|>\sqrt{3}$ がすべての実数 t に対して成り立つような k の値の範囲を求めよ。

8．次の３点を頂点とする $\triangle$ABC の面積 S を求めよ。

(1)　A$(0,\ 0)$，B$(3,\ 1)$，C$(2,\ 4)$　　(2)　A$(-2,\ 1)$，B$(3,\ 0)$，C$(2,\ 4)$

9．次の不等式を証明せよ。

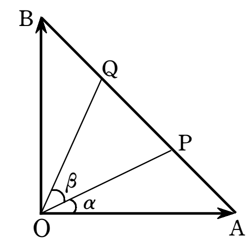
(1)　$-|\vec{a}||\vec{b}| \leqq \vec{a}\cdot\vec{b} \leqq |\vec{a}||\vec{b}|$　　(2)　$|\vec{a}|-|\vec{b}| \leqq |\vec{a}+\vec{b}| \leqq |\vec{a}|+|\vec{b}|$

10. 平面上のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $|2\vec{a}+\vec{b}|=1$，$|\vec{a}-3\vec{b}|=1$ を満たすように動くとき，$\dfrac{3}{7} \leqq |\vec{a}+\vec{b}| \leqq \dfrac{5}{7}$ となることを証明せよ。

11. (1)　xy 平面上に点 A$(2,\ 3)$ をとり，更に単位円 $x^2+y^2=1$ 上に点 P$(x,\ y)$ をとる。また，原点を O とする。2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のなす角を θ とするとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を θ のみで表せ。

(2)　実数 x，y が条件 $x^2+y^2=1$ を満たすとき，$2x+3y$ の最大値，最小値を求めよ。

12. 平面上で，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は直交し，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$ を満たすとする。線分 AB を 3 等分し，右図のように，A に近い点を P，B に近い点を Q とする。$\angle\mathrm{AOP}=\alpha$，$\angle\mathrm{POQ}=\beta$ とするとき，$\cos\alpha$，$\cos\beta$ の値を求めよ。



13. ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}-2\vec{b}|=7$ を満たしている。$\vec{a}-2\vec{b}$ と $2\vec{a}+\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

数学演習（ベクトルの内積）Ｒ１．１１．２２　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

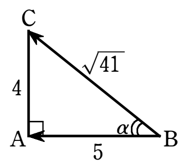
１．$\angle A=90^\circ$，AB$=5$，AC$=4$ の三角形において，次の内積を求めよ。

(1) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$　　(2) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}$　　(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}$

解答　(1) 25　(2) -16　(3) -25

解説

(1) $\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BC}$ のなす角 α は右の図の $\angle$ABC で，

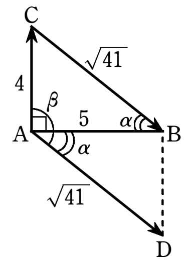


BC$=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41}$ であるから

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos\alpha$$

$$=5\times\sqrt{41}\times\frac{5}{\sqrt{41}}=25$$

(2) $\overrightarrow{CB}$ を $\overrightarrow{AD}$ に平行移動すると，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{CB}$ のなす角 β は，右の図で $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$ のなす角 $\angle$CAD$=90^\circ+\alpha$ に等しく



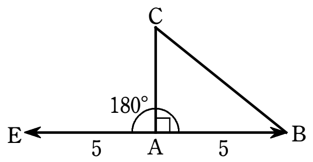
$$\cos\beta=\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha=-\frac{4}{\sqrt{41}}$$

ゆえに　$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{CB}|\cos\beta$

$$=4\times\sqrt{41}\times\left(-\frac{4}{\sqrt{41}}\right)$$

$$=-16$$

(3) $\overrightarrow{BA}$ を $\overrightarrow{AE}$ に平行移動すると，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BA}$ のなす角は，右の図で $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AE}$ のなす角であるから 180°



ゆえに　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BA}|\cos180^\circ$

$$=5\times5\times(-1)=-25$$

別解　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}\cdot(-\overrightarrow{AB})$

$$=-|\overrightarrow{AB}|^2=-25$$

２．次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積と，そのなす角 θ を求めよ。

(1) $\vec{a}=(-1,\ 1)$，$\vec{b}=(\sqrt{3}-1,\ \sqrt{3}+1)$　　(2) $\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ -3)$

解答　(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，$\theta=60^\circ$　(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-5$，$\theta=135^\circ$

解説

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1)\times(\sqrt{3}-1)+1\times(\sqrt{3}+1)=2$

また　$|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{2}{\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=60^\circ$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times1+2\times(-3)=-5$

また　$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=135^\circ$

３．(1) $\vec{p}=(-3,\ -4)$ と $\vec{q}=(a,\ -1)$ のなす角が 45° のとき，定数 a の値を求めよ。

(2) $\vec{a}=(1,\ -\sqrt{3})$ とのなす角が 120°，大きさが $2\sqrt{10}$ であるベクトル $\vec{b}$ を求めよ。

解答　(1) $a=-7$，$\dfrac{1}{7}$　(2) $(-2\sqrt{10},\ 0)$，$(\sqrt{10},\ \sqrt{30})$

解説

(1) $\vec{p}\cdot\vec{q}=(-3)\times a+(-4)\times(-1)=-3a+4$　……①

また　$|\vec{p}|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5$，$|\vec{q}|=\sqrt{a^2+1}$

よって　$\vec{p}\cdot\vec{q}=|\vec{p}||\vec{q}|\cos45^\circ=5\sqrt{a^2+1}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　……②

①，② から　$-3a+4=\dfrac{5}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+1}$　……③

ここで，$-3a+4>0$ であるから　$a<\dfrac{4}{3}$

③ の両辺を 2 乗して整理すると　$7a^2+48a-7=0$

ゆえに，$(a+7)(7a-1)=0$ から　$a=-7$，$\dfrac{1}{7}$　　これらは $a<\dfrac{4}{3}$ を満たす。

(2) $\vec{b}=(x,\ y)$ とする。

$|\vec{b}|=2\sqrt{10}$ から　$|\vec{b}|^2=40$　ゆえに　$x^2+y^2=40$　……①

$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$ であるから

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos120^\circ=2\cdot2\sqrt{10}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\sqrt{10}$$

また，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot x+(-\sqrt{3})\cdot y=x-\sqrt{3}\,y$ であるから

$x-\sqrt{3}\,y=-2\sqrt{10}$

よって　$x=\sqrt{3}\,y-2\sqrt{10}$　……②

② を ① に代入して　$(\sqrt{3}\,y-2\sqrt{10})^2+y^2=40$

ゆえに　$y^2-\sqrt{30}\,y=0$

よって　$y(y-\sqrt{30})=0$　ゆえに　$y=0$，$\sqrt{30}$

$y=0$ のとき，② から　$x=-2\sqrt{10}$　　$y=\sqrt{30}$ のとき，② から　$x=\sqrt{10}$

したがって　$\vec{b}=(-2\sqrt{10},\ 0)$，$(\sqrt{10},\ \sqrt{30})$

４．(1) 2 つのベクトル $\vec{a}=(x-1,\ 3)$，$\vec{b}=(1,\ x+1)$ が垂直になるような x の値を求めよ。

(2) ベクトル $\vec{a}=(2,\ 1)$ に垂直で，大きさ $\sqrt{10}$ のベクトル $\vec{u}$ を求めよ。

解答　(1) $x=-\dfrac{1}{2}$　(2) $\vec{u}=(\sqrt{2},\ -2\sqrt{2})$，$(-\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$

解説

(1) $\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ から，$\vec{a}\perp\vec{b}$ であるための条件は　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

ここで　$\vec{a}\cdot\vec{b}=(x-1)\times1+3\times(x+1)=4x+2$

ゆえに　$4x+2=0$　よって　$x=-\dfrac{1}{2}$

(2) $\vec{u}=(x,\ y)$ とする。$\vec{a}\perp\vec{u}$ であるから　$\vec{a}\cdot\vec{u}=0$

よって　$2x+y=0$　……①

また，$|\vec{u}|=\sqrt{10}$ であるから　$x^2+y^2=10$　……②

① から　$y=-2x$　……③

② に代入して　$x^2+(-2x)^2=10$　ゆえに　$x=\pm\sqrt{2}$

③ から　$\vec{u}=(\sqrt{2},\ -2\sqrt{2})$，$(-\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$

５．(1) 等式 $|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$ を証明せよ。

(2) $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$ で，$\vec{a}-\vec{b}$ と $2\vec{a}+5\vec{b}$ が垂直であるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

解答　(1) 略　(2) $\theta=120^\circ$

解説

(1) $|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$$=(\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b})+(\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b})$$

$$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2+|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$$

(2) $(\vec{a}-\vec{b})\perp(2\vec{a}+5\vec{b})$ から　$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}+5\vec{b})=0$

よって　$2|\vec{a}|^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}-5|\vec{b}|^2=0$

$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$ を代入して　$2\times4+3\vec{a}\cdot\vec{b}-5\times1=0$

ゆえに　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$

したがって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-1}{2\times1}=-\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=120^\circ$

６．ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について $|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}$ であるとき

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。

(2) ベクトル $2\vec{a}-3\vec{b}$ の大きさを求めよ。

(3) ベクトル $\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさが最小となるように実数 t の値を定め，そのときの最小値を求めよ。

解答　(1) 1　(2) 6　(3) $t=-\dfrac{1}{4}$ のとき最小値 $\dfrac{\sqrt{11}}{2}$

解説

(1) $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}$ から　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=5$

よって　$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=5$　ゆえに　$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=5$

$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$ であるから　$3-2\vec{a}\cdot\vec{b}+4=5$

したがって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$

(2) $|2\vec{a}-3\vec{b}|^2=(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-3\vec{b})=4|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2$

$$=4\times(\sqrt{3})^2-12\times1+9\times2^2=36$$

$|2\vec{a}-3\vec{b}|\geqq0$ であるから　$|2\vec{a}-3\vec{b}|=6$

(3) $|\vec{a}+t\vec{b}|^2=(\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{a}+t\vec{b})=|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2$

$$=4t^2+2t+3=4\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{11}{4}$$

よって，$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ は $t=-\dfrac{1}{4}$ のとき最小値 $\dfrac{11}{4}$ をとる。

$|\vec{a}+t\vec{b}|\geqq0$ であるから，このとき $|\vec{a}+t\vec{b}|$ も最小となる。

したがって，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ は $t=-\dfrac{1}{4}$ のとき最小値 $\dfrac{\sqrt{11}}{2}$ をとる。

7．k は実数の定数とする。$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$ とするとき，$|k\vec{a}+t\vec{b}|>\sqrt{3}$ がすべての実数 t に対して成り立つような k の値の範囲を求めよ。

解答　$k<-1$，$1<k$

解説

$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$ から　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\sqrt{7})^2$　　よって　$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=7$

ゆえに　$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=7$

$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$ であるから　$4-2\vec{a}\cdot\vec{b}+9=7$

したがって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

また，$|k\vec{a}+t\vec{b}|>\sqrt{3}$ は $|k\vec{a}+t\vec{b}|^2>3$ ……① と同値である。

① を変形すると　$k^2|\vec{a}|^2+2kt\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2>3$

すなわち　$9t^2+6kt+4k^2-3>0$　……②

② がすべての実数 t について成り立つための必要十分条件は，t の 2 次方程式

$9t^2+6kt+4k^2-3=0$ の判別式を D とすると，t^2 の係数が正であるから　$D<0$

ここで　$\dfrac{D}{4}=(3k)^2-9(4k^2-3)=-27k^2+27$

$=-27(k^2-1)=-27(k+1)(k-1)$

$D<0$ から　$(k+1)(k-1)>0$

よって　$k<-1$，$1<k$

8．次の 3 点を頂点とする △ABC の面積 S を求めよ。

(1)　A(0, 0)，B(3, 1)，C(2, 4)　　(2)　A(−2, 1)，B(3, 0)，C(2, 4)

解答　(1)　$S=5$　　(2)　$S=\dfrac{19}{2}$

解説

(1)　$S=\dfrac{1}{2}|3\cdot4-1\cdot2|=\dfrac{1}{2}\cdot10=5$

(2)　3 点 A(−2, 1)，B(3, 0)，C(2, 4) を，点 B が原点 O にくるように平行移動するとき，A，C がそれぞれ A′，C′ に移るとすると，A′(−5, 1)，C′(−1, 4) となる。

このとき，$S=\triangle \mathrm{A'OC'}$ であるから

$S=\dfrac{1}{2}|(-5)\cdot4-1\cdot(-1)|=\dfrac{19}{2}$

9．次の不等式を証明せよ。

(1)　$-|\vec{a}||\vec{b}|\leqq\vec{a}\cdot\vec{b}\leqq|\vec{a}||\vec{b}|$　　(2)　$|\vec{a}|-|\vec{b}|\leqq|\vec{a}+\vec{b}|\leqq|\vec{a}|+|\vec{b}|$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　[1]　$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のとき

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$|\vec{a}||\vec{b}|=0$ であるから

$-|\vec{a}||\vec{b}|=\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|=0$

[2]　$\vec{a}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき

$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$　……①

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より，$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ であるから　$-|\vec{a}||\vec{b}|\leqq|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\leqq|\vec{a}||\vec{b}|$

① から　$-|\vec{a}||\vec{b}|\leqq\vec{a}\cdot\vec{b}\leqq|\vec{a}||\vec{b}|$

[1]，[2] から　$-|\vec{a}||\vec{b}|\leqq\vec{a}\cdot\vec{b}\leqq|\vec{a}||\vec{b}|$

別解　$\vec{a}=\vec{0}$ のとき，明らかに成り立つ。

$\vec{a}\neq\vec{0}$ のとき，$|t\vec{a}+\vec{b}|^2\geqq0$ すなわち $t^2|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\geqq0$ ……(A) はすべての実数 t について成り立つから，[(A) の左辺]$=0$ の判別式を D とすると，$|\vec{a}|^2>0$ より

$D\leqq0$

$\dfrac{D}{4}=(\vec{a}\cdot\vec{b})^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$ から　$-|\vec{a}||\vec{b}|\leqq\vec{a}\cdot\vec{b}\leqq|\vec{a}||\vec{b}|$

(2)　$(|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2-|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|+|\vec{b}|^2-(|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2)$

$=2(|\vec{a}||\vec{b}|-\vec{a}\cdot\vec{b})\geqq0$

ゆえに　$|\vec{a}+\vec{b}|^2\leqq(|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2$

$|\vec{a}|+|\vec{b}|\geqq0$，$|\vec{a}+\vec{b}|\geqq0$ から　$|\vec{a}+\vec{b}|\leqq|\vec{a}|+|\vec{b}|$　……②

② において，$\vec{a}$ を $\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{b}$ を $-\vec{b}$ におき換えると　$|\vec{a}+\vec{b}-\vec{b}|\leqq|\vec{a}+\vec{b}|+|-\vec{b}|$

よって　$|\vec{a}|\leqq|\vec{a}+\vec{b}|+|\vec{b}|$　　ゆえに　$|\vec{a}|-|\vec{b}|\leqq|\vec{a}+\vec{b}|$　……③

②，③ から　$|\vec{a}|-|\vec{b}|\leqq|\vec{a}+\vec{b}|\leqq|\vec{a}|+|\vec{b}|$

10．平面上のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $|2\vec{a}+\vec{b}|=1$，$|\vec{a}-3\vec{b}|=1$ を満たすように動くとき，$\dfrac{3}{7}\leqq|\vec{a}+\vec{b}|\leqq\dfrac{5}{7}$ となることを証明せよ。

解答　略

解説

$2\vec{a}+\vec{b}=\vec{p}$ ……①，$\vec{a}-3\vec{b}=\vec{q}$ ……②　とおく。

(①×3+②)÷7，(①−②×2)÷7 から　$\vec{a}=\dfrac{3}{7}\vec{p}+\dfrac{1}{7}\vec{q}$，$\vec{b}=\dfrac{1}{7}\vec{p}-\dfrac{2}{7}\vec{q}$

よって，$\vec{a}+\vec{b}=\dfrac{4}{7}\vec{p}-\dfrac{1}{7}\vec{q}$ で，$|\vec{p}|=|\vec{q}|=1$ であるから

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=\left|\frac{4}{7}\vec{p}-\frac{1}{7}\vec{q}\right|^2=\frac{1}{49}(16|\vec{p}|^2-8\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2)=\frac{17}{49}-\frac{8}{49}\vec{p}\cdot\vec{q}$$

ここで，$-|\vec{p}||\vec{q}|\leqq\vec{p}\cdot\vec{q}\leqq|\vec{p}||\vec{q}|$，$|\vec{p}|=|\vec{q}|=1$ であるから　$-1\leqq\vec{p}\cdot\vec{q}\leqq1$

ゆえに，$\dfrac{17}{49}-\dfrac{8}{49}\leqq|\vec{a}+\vec{b}|^2\leqq\dfrac{17}{49}+\dfrac{8}{49}$ から　$\dfrac{9}{49}\leqq|\vec{a}+\vec{b}|^2\leqq\dfrac{25}{49}$

したがって　$\dfrac{3}{7}\leqq|\vec{a}+\vec{b}|\leqq\dfrac{5}{7}$

別解　$2\vec{a}+\vec{b}=\vec{p}$ ……①，$\vec{a}-3\vec{b}=\vec{q}$ ……②　とおく。

(①×3+②)÷7，(①−②×2)÷7 から　$\vec{a}=\dfrac{3}{7}\vec{p}+\dfrac{1}{7}\vec{q}$，$\vec{b}=\dfrac{1}{7}\vec{p}-\dfrac{2}{7}\vec{q}$

$\vec{a}+\vec{b}=\dfrac{4}{7}\vec{p}-\dfrac{1}{7}\vec{q}$ より，$7(\vec{a}+\vec{b})=4\vec{p}-\vec{q}$ であるから，不等式

$|\vec{a}|-|\vec{b}|\leqq|\vec{a}+\vec{b}|\leqq|\vec{a}|+|\vec{b}|$ を利用すると

$|4\vec{p}|-|-\vec{q}|\leqq|4\vec{p}+(-\vec{q})|\leqq|4\vec{p}|+|-\vec{q}|$

よって　$4|\vec{p}|-|\vec{q}|\leqq|4\vec{p}-\vec{q}|\leqq4|\vec{p}|+|\vec{q}|$

$|\vec{p}|=|\vec{q}|=1$ であるから　$3\leqq|4\vec{p}-\vec{q}|\leqq5$

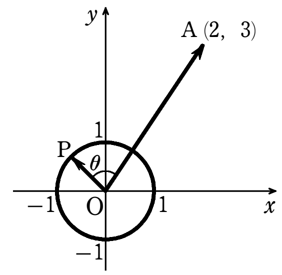
ゆえに　$3\leqq|7(\vec{a}+\vec{b})|\leqq5$　すなわち　$\dfrac{3}{7}\leqq|\vec{a}+\vec{b}|\leqq\dfrac{5}{7}$

11．(1)　xy 平面上に点 A(2, 3) をとり，更に単位円 $x^2+y^2=1$ 上に点 P(x, y) をとる。また，原点を O とする。2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のなす角を θ とするとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を θ のみで表せ。

(2)　実数 x，y が条件 $x^2+y^2=1$ を満たすとき，$2x+3y$ の最大値，最小値を求めよ。

解答　(1)　$\sqrt{13}\cos\theta$　　(2)　最大値は $\sqrt{13}$，最小値は $-\sqrt{13}$

解説



(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=1$ から

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\theta=\sqrt{13}\cos\theta$

(2)　$x^2+y^2=1$ を満たす x，y に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y)$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2,\ 3)$ として，2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のなす角を θ とすると，(1) から

$2x+3y=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\sqrt{13}\cos\theta$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より，$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ であるから，

$2x+3y$ の最大値は $\sqrt{13}$，最小値は $-\sqrt{13}$

別解 1．$2x+3y=k$ とおくと　$y=\dfrac{k}{3}-\dfrac{2}{3}x$

これを $x^2+y^2=1$ に代入し，整理すると

$13x^2-4kx+k^2-9=0$　……①

x は実数であるから，x の 2 次方程式 ① の判別式を D とすると　$D\geqq0$

$\dfrac{D}{4}=(-2k)^2-13(k^2-9)=-9(k^2-13)$ であるから　$k^2\leqq13$

よって　$-\sqrt{13}\leqq k\leqq\sqrt{13}$

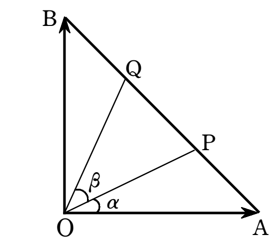
別解 2．$(x,\ y)=(\cos\theta_1,\ \sin\theta_1)$ と表されるから

$2x+3y=2\cos\theta_1+3\sin\theta_1=\sqrt{2^2+3^2}\sin(\theta_1+\alpha)$

$=\sqrt{13}\sin(\theta_1+\alpha)$

$-1\leqq\sin(\theta_1+\alpha)\leqq1$ であるから　$-\sqrt{13}\leqq2x+3y\leqq\sqrt{13}$

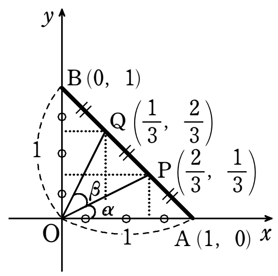
12. 平面上で，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は直交し，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$ を満たすとする。線分 AB を 3 等分し，右図のように，A に近い点を P，B に近い点を Q とする。$\angle\mathrm{AOP}=\alpha$，$\angle\mathrm{POQ}=\beta$ とするとき，$\cos\alpha$，$\cos\beta$ の値を求めよ。



解答　$\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\beta=\dfrac{4}{5}$

解説

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$ であるから，O を原点，直線 OA を x 軸，直線 OB を y 軸とする座標平面を考えると，A$(1,\ 0)$，B$(0,\ 1)$ とおける。



このとき，$\mathrm{P}\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

よって　$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}=\frac{1\times\frac{2}{3}+0\times\frac{1}{3}}{1\times\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\beta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{4}{5}$$

13. ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}-2\vec{b}|=7$ を満たしている。$\vec{a}-2\vec{b}$ と $2\vec{a}+\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

解答　$\dfrac{23}{77}$

解説

$|\vec{a}-2\vec{b}|=7$ から　　$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=49$

よって　　$|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=49$

$|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=3$ であるから　　$5^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\times3^2=49$　　ゆえに　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

よって　　$|2\vec{a}+\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4\times5^2+4\times3+3^2=121$

$|2\vec{a}+\vec{b}|\geqq0$ であるから　　$|2\vec{a}+\vec{b}|=11$

したがって　　$$\cos\theta=\frac{(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})}{|\vec{a}-2\vec{b}||2\vec{a}+\vec{b}|}=\frac{2|\vec{a}|^2-3\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2}{7\times11}$$

$$=\frac{2\times5^2-3\times3-2\times3^2}{77}=\frac{23}{77}$$