数学演習（ベクトルの成分）Ｒ１．１１．２１　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1．(1) $\vec{a}=(3,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ -1)$ のとき，次のベクトルの成分を求めよ。

(ア) $\vec{a}+\vec{b}$　　　(イ) $3\vec{a}-4\vec{b}$

(2) 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ において，$2\vec{a}-\vec{b}=(4,\ 1)$，$3\vec{a}-2\vec{b}=(7,\ 0)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ を求めよ。また，$\vec{a}-3\vec{b}$ の大きさを求めよ。

2．(1) $\vec{p}=(-7,\ 2)$，$\vec{x}=(1,\ a)$，$\vec{y}=(b,\ 2)$ とする。等式 $\vec{p}=2\vec{x}-3\vec{y}$ が成り立つとき，a，b の値を求めよ。

(2) $\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ 1)$ であるとき，$\vec{c}=(11,\ 10)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}$ の形に表せ。

3．2 つのベクトル $\vec{a}=(3,\ -1)$，$\vec{b}=(7-2t,\ -5+t)$ が平行になるように，t の値を定めよ。

4．3 点 A (1，3)，B (3，−2)，C (4，1) がある。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ の成分と大きさをそれぞれ求めよ。

(2)　四角形 ABCD が平行四辺形であるとき，点 D の座標を求めよ。

(3)　(2) の平行四辺形について，2 本の対角線の長さを求めよ。

5．t は実数とする。$\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(3,\ 4)$ に対して，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ は $t=$ ア$\boxed{}$ のとき最小値 イ$\boxed{}$ をとる。

6．(1)　$\vec{a}=(-3,\ 4)$，$\vec{b}=(1,\ -2)$ のとき，$\vec{a}+\vec{b}$ と同じ向きの単位ベクトルを求めよ。

(2)　ベクトル $\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ 1)$ に対し，ベクトル $t\vec{a}+\vec{b}$ の大きさが 1 となる t の値を求めよ。

(3)　$\vec{a}=(-5,\ 4)$，$\vec{b}=(7,\ -5)$，$\vec{c}=(1,\ t)$ に対して $|\vec{a}-\vec{c}|=2|\vec{b}-\vec{c}|$ が成り立つとき，t の値を求めよ。

1．(1)　$\vec{a}=(3,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ -1)$ のとき，次のベクトルの成分を求めよ。

（ア）　$\vec{a}+\vec{b}$　　（イ）　$3\vec{a}-4\vec{b}$

(2)　2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ において，$2\vec{a}-\vec{b}=(4,\ 1)$，$3\vec{a}-2\vec{b}=(7,\ 0)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ を求めよ。また，$\vec{a}-3\vec{b}$ の大きさを求めよ。

解答　(1)（ア）$(5,\ 1)$　（イ）$(1,\ 10)$

(2)　$\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(-2,\ 3)$，$\vec{a}-3\vec{b}$ の大きさは $7\sqrt{2}$

解説

(1)（ア）$\vec{a}+\vec{b}=(3,\ 2)+(2,\ -1)=(3+2,\ 2+(-1))=(5,\ 1)$

（イ）$3\vec{a}-4\vec{b}=3(3,\ 2)-4(2,\ -1)=(3\cdot3-4\cdot2,\ 3\cdot2-4\cdot(-1))=(1,\ 10)$

(2)　$2\vec{a}-\vec{b}=(4,\ 1)$ …… ①，$3\vec{a}-2\vec{b}=(7,\ 0)$ …… ② とする。

①×2－② から

$\vec{a}=2(4,\ 1)-(7,\ 0)$

ゆえに　$\vec{a}=(2\cdot4-7,\ 2\cdot1-0)=(1,\ 2)$

これと ① から

$\vec{b}=2\vec{a}-(4,\ 1)=2(1,\ 2)-(4,\ 1)$

$=(2\cdot1-4,\ 2\cdot2-1)=(-2,\ 3)$

よって　$\vec{a}-3\vec{b}=(1,\ 2)-3(-2,\ 3)=(1-3\cdot(-2),\ 2-3\cdot3)$

$=(7,\ -7)$

ゆえに　$|\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{7^2+(-7)^2}=\sqrt{98}=7\sqrt{2}$

2．(1)　$\vec{p}=(-7,\ 2)$，$\vec{x}=(1,\ a)$，$\vec{y}=(b,\ 2)$ とする。等式 $\vec{p}=2\vec{x}-3\vec{y}$ が成り立つとき，a，b の値を求めよ。

(2)　$\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ 1)$ であるとき，$\vec{c}=(11,\ 10)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}$ の形に表せ。

解答　(1)　$a=4$，$b=3$　(2)　$\vec{c}=3\vec{a}+4\vec{b}$

解説

(1)　$\vec{p}=2\vec{x}-3\vec{y}$ から　$(-7,\ 2)=2(1,\ a)-3(b,\ 2)$

よって　$(-7,\ 2)=(2-3b,\ 2a-6)$　ゆえに　$-7=2-3b$，$2=2a-6$

よって　$a=4$，$b=3$

(2)　$\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと　$(11,\ 10)=s(1,\ 2)+t(2,\ 1)$

すなわち　$(11,\ 10)=(s+2t,\ 2s+t)$

ゆえに　$s+2t=11$，$2s+t=10$　よって　$s=3$，$t=4$

ゆえに　$\vec{c}=3\vec{a}+4\vec{b}$

3．2 つのベクトル $\vec{a}=(3,\ -1)$，$\vec{b}=(7-2t,\ -5+t)$ が平行になるように，t の値を定めよ。

解答　$t=8$

解説

$\vec{a}\fallingdotseq\vec{0}$，$\vec{b}\fallingdotseq\vec{0}$ であるから，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行になるための必要十分条件は，$\vec{b}=k\vec{a}$ を満たす実数 k が存在することである。

よって　$(7-2t,\ -5+t)=k(3,\ -1)$

すなわち　$(7-2t,\ -5+t)=(3k,\ -k)$

ゆえに　$7-2t=3k$ …… ①，$-5+t=-k$ …… ②

①＋②× 3 から　$-8+t=0$

したがって　$t=8$

別解　$\vec{a}\fallingdotseq\vec{0}$，$\vec{b}\fallingdotseq\vec{0}$ であるから，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行になるための必要十分条件は

$3\cdot(-5+t)-(-1)\cdot(7-2t)=0$

よって　$-15+3t+7-2t=0$　したがって　$t=8$

4．3点 A$(1,\ 3)$，B$(3,\ -2)$，C$(4,\ 1)$ がある。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ の成分と大きさをそれぞれ求めよ。

(2) 四角形 ABCD が平行四辺形であるとき，点 D の座標を求めよ。

(3) (2) の平行四辺形について，2 本の対角線の長さを求めよ。

解答 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ -5)$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{29}$；$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(1,\ 3)$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{10}$；

$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(-3,\ 2)$，$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=\sqrt{13}$

(2) D$(2,\ 6)$　(3) $\sqrt{13}$，$\sqrt{65}$

解説

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3-1,\ -2-3)=(2,\ -5)$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{2^2+(-5)^2}=\sqrt{29}$

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(4-3,\ 1-(-2))=(1,\ 3)$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(1-4,\ 3-1)=(-3,\ 2)$，$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=\sqrt{(-3)^2+2^2}=\sqrt{13}$

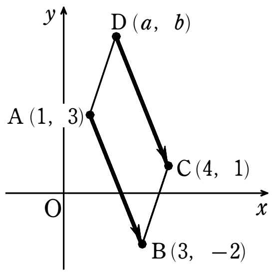
(2) D の座標を $(a,\ b)$ とする。四角形 ABCD は平行四辺形であるから　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$

よって　$(2,\ -5)=(4-a,\ 1-b)$

ゆえに　$2=4-a$，$-5=1-b$

これを解いて　$a=2$，$b=6$

したがって　D$(2,\ 6)$



(3) 2 本の対角線の長さは $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|$ である。

よって，(1) から　$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{13}$

また，(2) から　$|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|=\sqrt{(2-3)^2+\{6-(-2)\}^2}=\sqrt{65}$

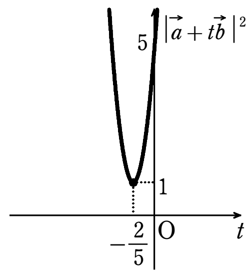
5．t は実数とする。$\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(3,\ 4)$ に対して，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ は $t=$ ア□ のとき最小値 イ□ をとる。

解答 (ア) $-\dfrac{2}{5}$　(イ) 1

解説

$\vec{a}+t\vec{b}=(2,\ 1)+t(3,\ 4)=(2+3t,\ 1+4t)$ から

$$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=(2+3t)^2+(1+4t)^2$$
$$=25t^2+20t+5=25\left(t+\frac{2}{5}\right)^2+1$$



ゆえに，$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ は $t=-\dfrac{2}{5}$ のとき最小値 1 をとる。

$|\vec{a}+t\vec{b}|\geqq 0$ であるから，このとき $|\vec{a}+t\vec{b}|$ も最小となる。

よって，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ は $t=$ ア $-\dfrac{2}{5}$ のとき最小値 $\sqrt{1}=$ イ 1 をとる。

6．(1) $\vec{a}=(-3,\ 4)$，$\vec{b}=(1,\ -2)$ のとき，$\vec{a}+\vec{b}$ と同じ向きの単位ベクトルを求めよ。

(2) ベクトル $\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ 1)$ に対し，ベクトル $t\vec{a}+\vec{b}$ の大きさが 1 となる t の値を求めよ。

(3) $\vec{a}=(-5,\ 4)$，$\vec{b}=(7,\ -5)$，$\vec{c}=(1,\ t)$ に対して $|\vec{a}-\vec{c}|=2|\vec{b}-\vec{c}|$ が成り立つとき，t の値を求めよ。

解答 (1) $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$　(2) $t=-1,\ -\dfrac{1}{5}$　(3) $t=-8$

解説

(1) $\vec{a}+\vec{b}=(-3,\ 4)+(1,\ -2)=(-2,\ 2)$ であるから

$$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$$

よって，$\vec{a}+\vec{b}$ と同じ向きの単位ベクトルは

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{2\sqrt{2}}(-2,\ 2)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

(2) $t\vec{a}+\vec{b}=t(1,\ 2)+(1,\ 1)=(t+1,\ 2t+1)$

$|t\vec{a}+\vec{b}|=1$ となるための条件は　$|t\vec{a}+\vec{b}|^2=1$

よって　$(t+1)^2+(2t+1)^2=1$　すなわち　$5t^2+6t+1=0$

ゆえに　$(t+1)(5t+1)=0$　したがって　$t=-1,\ -\dfrac{1}{5}$

(3) $\vec{a}-\vec{c}=(-6,\ 4-t)$，$\vec{b}-\vec{c}=(6,\ -(t+5))$

$|\vec{a}-\vec{c}|=2|\vec{b}-\vec{c}|$ であるから　$|\vec{a}-\vec{c}|^2=4|\vec{b}-\vec{c}|^2$

ゆえに　$(-6)^2+(4-t)^2=4\{6^2+(t+5)^2\}$

よって　$t^2+16t+64=0$　ゆえに　$(t+8)^2=0$

よって　$t=-8$