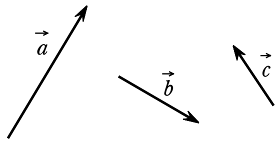
１．右の図で与えられた３つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ について，
ベクトル $\vec{a}+2\vec{b}$，$2\vec{a}-\vec{b}$，$2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ を図示せよ。



２．(1)　次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{RA}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{DQ}+\overrightarrow{RD}$$

(2)　$3\vec{x}+\vec{a}-2\vec{b}=5(\vec{x}+\vec{b})$ を満たす $\vec{x}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(3)　$5\vec{x}+3\vec{y}=\vec{a}$，$3\vec{x}-5\vec{y}=\vec{b}$ を満たす $\vec{x}$，$\vec{y}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

３．(1)　平面上に異なる４点 A，B，C，Dと直線 AB 上にない点 O がある。
$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OC}=3\vec{a}-2\vec{b}$，$\overrightarrow{OD}=-3\vec{a}+4\vec{b}$ であれば $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CD}$ である。このことを証明せよ。

(2)　$|\vec{a}|=3$ のとき，$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルを求めよ。

(3)　AB＝3，AD＝4 の長方形 ABCD がある。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とするとき，ベクトル $\overrightarrow{BD}$ と平行な単位ベクトルを $\vec{b}$，$\vec{d}$ で表せ。

4．正六角形 ABCDEF において，中心を O，辺 CD を 2 : 1 に内分する点を P，辺 EF の中点を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{b}$ とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

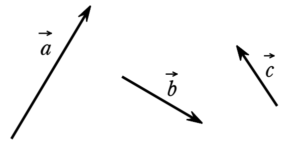
5．$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ のとき，等式 $3s\vec{a}+2(t+1)\vec{b}=(5t-1)\vec{a}-(s+1)\vec{b}$ を満たす実数 s，t の値を求めよ。

6．平行四辺形 ABCD において，対角線の交点を P，辺 BC を 2 : 1 に内分する点を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\vec{q}$ を用いて表せ。

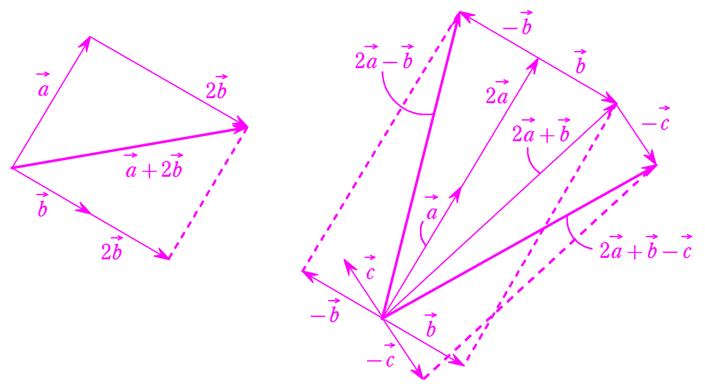
7．△ABC において，$2\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$2\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるとき，四角形 ABPQ はどのような形か。

数学演習（ベクトルの演算）Ｒ１．１１．２０　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

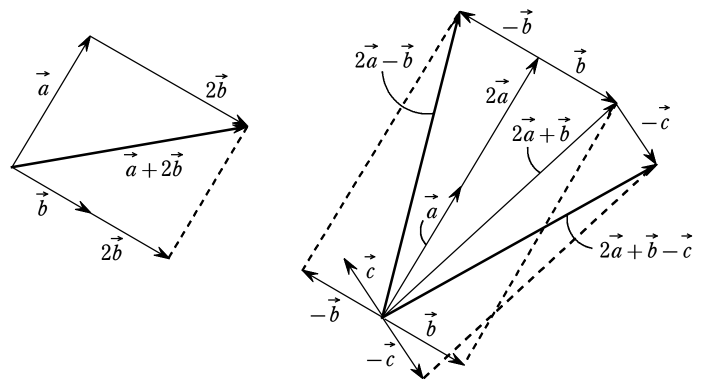
1． 右の図で与えられた 3 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ について，ベクトル $\vec{a}+2\vec{b}$，$2\vec{a}-\vec{b}$，$2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ を図示せよ。



解答　［図］太いベクトル



解説



2． (1)　次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{RA}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{DQ}+\overrightarrow{RD}$$

(2)　$3\vec{x}+\vec{a}-2\vec{b}=5(\vec{x}+\vec{b})$ を満たす $\vec{x}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(3)　$5\vec{x}+3\vec{y}=\vec{a}$，$3\vec{x}-5\vec{y}=\vec{b}$ を満たす $\vec{x}$，$\vec{y}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

解答　(1)　略　　(2)　$\vec{x}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{7}{2}\vec{b}$　　(3)　$\vec{x}=\frac{5}{34}\vec{a}+\frac{3}{34}\vec{b}$，$\vec{y}=\frac{3}{34}\vec{a}-\frac{5}{34}\vec{b}$

解説

(1)　$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{RA}-(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{DQ}+\overrightarrow{RD})$

$=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})+(\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PC})+(\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{QD})+(\overrightarrow{DR}+\overrightarrow{RA})$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

ゆえに　$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{RA}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{DQ}+\overrightarrow{RD}$

(2)　$3\vec{x}+\vec{a}-2\vec{b}=5(\vec{x}+\vec{b})$ から　　$3\vec{x}+\vec{a}-2\vec{b}=5\vec{x}+5\vec{b}$

よって　$2\vec{x}=\vec{a}-7\vec{b}$　　ゆえに　$\vec{x}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{7}{2}\vec{b}$

(3)　$5\vec{x}+3\vec{y}=\vec{a}$ ……①，$3\vec{x}-5\vec{y}=\vec{b}$ ……②　とする。

①×5＋②×3 から　　$\vec{x}=\frac{5}{34}\vec{a}+\frac{3}{34}\vec{b}$

①×3－②×5 から　　$\vec{y}=\frac{3}{34}\vec{a}-\frac{5}{34}\vec{b}$

3． (1)　平面上に異なる 4 点 A，B，C，D と直線 AB 上にない点 O がある。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OC}=3\vec{a}-2\vec{b}$，$\overrightarrow{OD}=-3\vec{a}+4\vec{b}$ であれば $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CD}$ である。このことを証明せよ。

(2)　$|\vec{a}|=3$ のとき，$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルを求めよ。

(3)　AB＝3，AD＝4 の長方形 ABCD がある。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とするとき，ベクトル $\overrightarrow{BD}$ と平行な単位ベクトルを $\vec{b}$，$\vec{d}$ で表せ。

解答　(1)　略　　(2)　$\frac{\vec{a}}{3}$ と $-\frac{\vec{a}}{3}$　　(3)　$-\frac{\vec{b}}{5}+\frac{\vec{d}}{5}$ と $\frac{\vec{b}}{5}-\frac{\vec{d}}{5}$

解説

(1)　$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=(-3\vec{a}+4\vec{b})-(3\vec{a}-2\vec{b})=-6\vec{a}+6\vec{b}=6(\vec{b}-\vec{a})$

よって　$\overrightarrow{CD}=6\overrightarrow{AB}$　　また　$\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{CD}\neq\vec{0}$

ゆえに　$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CD}$

(2)　$|\vec{a}|=3$ から，$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルは　$\frac{\vec{a}}{3}$ と $-\frac{\vec{a}}{3}$

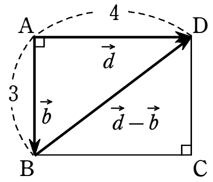
(3)　$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\vec{d}-\vec{b}$

$|\overrightarrow{BD}|=BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

よって，$\overrightarrow{BD}$ と平行な単位ベクトルは

$\frac{\vec{d}-\vec{b}}{5}$ と $-\frac{\vec{d}-\vec{b}}{5}$

すなわち　$-\frac{\vec{b}}{5}+\frac{\vec{d}}{5}$ と $\frac{\vec{b}}{5}-\frac{\vec{d}}{5}$



4．正六角形 ABCDEF において，中心を O，辺 CD を 2：1 に内分する点を P，辺 EF の中点を Q とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，ベクトル $\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{CE}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{QP}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

解答　$\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{EF}=-\vec{a}-\vec{b}$，$\overrightarrow{CE}=-\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=2\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{BD}=\vec{a}+2\vec{b}$，
$\overrightarrow{QP}=\dfrac{3}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}$

解説

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=\vec{b}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OF}=-\vec{b}-\vec{a}=-\vec{a}-\vec{b}$

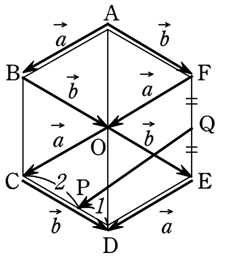
$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OE}=-\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b}=\vec{a}+2\vec{b}$

$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{QE}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}$

$\quad=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})+\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}=\dfrac{3}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}$



5．$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ のとき，等式 $3s\vec{a}+2(t+1)\vec{b}=(5t-1)\vec{a}-(s+1)\vec{b}$ を満たす実数 s，t の値を求めよ。

解答　$s=-\dfrac{17}{11}$，$t=-\dfrac{8}{11}$

解説

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから，$3s\vec{a}+2(t+1)\vec{b}=(5t-1)\vec{a}-(s+1)\vec{b}$ のとき

$3s=5t-1$ ……①，$2(t+1)=-(s+1)$ ……②

①，② を解いて　$s=-\dfrac{17}{11}$，$t=-\dfrac{8}{11}$

6．平行四辺形 ABCD において，対角線の交点を P，辺 BC を 2：1 に内分する点を Q とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ をそれぞれ $\overrightarrow{AP}=\vec{p}$，$\overrightarrow{AQ}=\vec{q}$ を用いて表せ。

解答　$\vec{b}=-4\vec{p}+3\vec{q}$，$\vec{d}=6\vec{p}-3\vec{q}$

解説

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$

$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

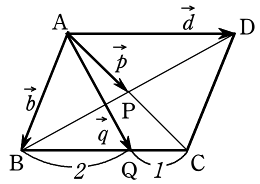
$\quad=\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

よって　$2\vec{p}=\vec{b}+\vec{d}$ ……①

$3\vec{q}=3\vec{b}+2\vec{d}$ ……②

②－①×2 から　$\vec{b}=-4\vec{p}+3\vec{q}$

①×3－② から　$\vec{d}=6\vec{p}-3\vec{q}$



7．△ABC において，$2\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}$，$2\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$ であるとき，四角形 ABPQ はどのような形か。

解答　平行四辺形

解説

$2\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}$ から　$\overrightarrow{BP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ ……①

$2\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$ から　$2\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

よって　$2\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{BC}$

ゆえに　$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ ……②

①，② から　$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AQ}$

よって　$BP\parallel AQ$，$BP=AQ$

したがって，四角形 ABPQ は平行四辺形である。