数学演習（ベクトルの内積）Ｈ２２．１２．２１　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

１．$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする。次の場合の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(1) $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=6$，$\theta=45^\circ$　　(2) $|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=8$，$\theta=120^\circ$

２．次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積を求めよ。また，(3)，(4) は，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ も求めよ。

(1) $\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(5,\ -2)$　　(2) $\vec{a}=(-1,\ 2)$，$\vec{b}=(3,\ -5)$

(3) $\vec{a}=(3,\ 2)$，$\vec{b}=(4,\ -6)$　　(4) $\vec{a}=(-1,\ 3)$，$\vec{b}=(2,\ -1)$

３．次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が垂直になるように，x の値を定めよ。

(1) $\vec{a}=(-2,\ 3)$，$\vec{b}=(x,\ 6)$　　(2) $\vec{a}=(-3,\ x^2)$，$\vec{b}=(6,\ 2)$

４．$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 30° であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$|3\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めよ。

５．$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$，$|\vec{a}-\vec{b}|=1$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

６．$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=2$ で，ベクトル $\vec{a}-4\vec{b}$，$\vec{a}$ が垂直であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

７．ベクトル $\vec{a}=(-1,\ \sqrt{3})$ に垂直で，大きさが 2 のベクトルを求めよ。

８．1 辺の長さが 2 の正三角形 ABC がある。辺 BC を 3 等分する点を，B に近い方から順に P，Q とするとき，内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$ を求めよ。

数学演習（ベクトルの内積）Ｈ２２．１２．２１　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1．$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする。次の場合の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(1) $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=6$，$\theta=45^\circ$　　(2) $|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=8$，$\theta=120^\circ$

解答　(1) $6\sqrt{2}$　(2) $-4\sqrt{3}$

解説

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=2\times6\times\cos45^\circ=2\times6\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=6\sqrt{2}$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\sqrt{3}\times8\times\cos120^\circ=\sqrt{3}\times8\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-4\sqrt{3}$

2．次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積を求めよ。また，(3)，(4) は，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ も求めよ。

(1) $\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(5,\ -2)$　　(2) $\vec{a}=(-1,\ 2)$，$\vec{b}=(3,\ -5)$

(3) $\vec{a}=(3,\ 2)$，$\vec{b}=(4,\ -6)$　　(4) $\vec{a}=(-1,\ 3)$，$\vec{b}=(2,\ -1)$

解答　(1) -1　(2) -13　(3) 0，$\theta=90^\circ$　(4) -5，$\theta=135^\circ$

解説

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times5+3\times(-2)=-1$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1\times3+2\times(-5)=-13$

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times4+2\times(-6)=0$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=0$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=90^\circ$

(4) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1\times2+3\times(-1)=-5$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-5}{\sqrt{(-1)^2+3^2}\sqrt{2^2+(-1)^2}}$

$=\dfrac{-5}{5\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=135^\circ$

3．次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が垂直になるように，x の値を定めよ。

(1) $\vec{a}=(-2,\ 3)$，$\vec{b}=(x,\ 6)$　　(2) $\vec{a}=(-3,\ x^2)$，$\vec{b}=(6,\ 2)$

解答　(1) $x=9$　(2) $x=\pm3$

解説

(1) $\vec{a}\perp\vec{b}$ になるための条件は　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$　よって　$(-2)\times x+3\times6=0$

これを解いて　$x=9$

(2) $\vec{a}\perp\vec{b}$ になるための条件は　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$　よって　$(-3)\times6+x^2\times2=0$

ゆえに　$x^2=9$　したがって　$x=\pm3$

4．$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 30° であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$|3\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めよ。

解答　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$，$|3\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$

解説

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos30^\circ=\sqrt{3}\times2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3$

よって　$|3\vec{a}-\vec{b}|^2=(3\vec{a}-\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})=9|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=9\times(\sqrt{3})^2-6\times3+2^2=13$

$|3\vec{a}-\vec{b}|\geqq0$ であるから　$|3\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$

5．$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$，$|\vec{a}-\vec{b}|=1$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

解答　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，$\theta=45^\circ$

解説

$|\vec{a}-\vec{b}|=1$ であるから　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=1^2$

よって　$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=1$　ゆえに　$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1$

したがって　$1^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+(\sqrt{2})^2=1$　よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$

また　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{1}{1\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=45^\circ$

6．$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=2$ で，ベクトル $\vec{a}-4\vec{b}$，$\vec{a}$ が垂直であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

解答　$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$，$\theta=60^\circ$

解説

$(\vec{a}-4\vec{b})\perp\vec{a}$ であるから　$(\vec{a}-4\vec{b})\cdot\vec{a}=0$

よって　$|\vec{a}|^2-4\vec{b}\cdot\vec{a}=0$

$|\vec{a}|=4$ であるから　$4^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

したがって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$

また　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{4}{4\times2}=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=60^\circ$

7．ベクトル $\vec{a}=(-1,\ \sqrt{3})$ に垂直で，大きさが 2 のベクトルを求めよ。

解答　$(\sqrt{3},\ 1)$ または $(-\sqrt{3},\ -1)$

解説

求めるベクトルを $\vec{b}=(x,\ y)$ とする。

$\vec{a}\perp\vec{b}$ であるから　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$　よって　$-x+\sqrt{3}y=0$

すなわち　$x=\sqrt{3}y$　……①

$|\vec{b}|=2$ であるから　$|\vec{b}|^2=2^2$　よって　$x^2+y^2=4$

① を代入して　$(\sqrt{3}y)^2+y^2=4$　ゆえに，$y^2=1$ から　$y=\pm1$

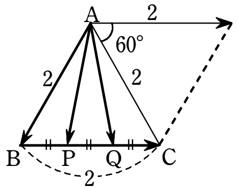
① から　$y=1$ のとき　$x=\sqrt{3}$，　$y=-1$ のとき　$x=-\sqrt{3}$

したがって，求めるベクトルは　$(\sqrt{3},\ 1)$ または $(-\sqrt{3},\ -1)$

8．1 辺の長さが 2 の正三角形 ABC がある。辺 BC を 3 等分する点を，B に近い方から順に P，Q とするとき，内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$ を求めよ。

解答　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-2$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\dfrac{26}{9}$

解説



$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{BC}$ のなす角は 120° であるから

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=2\times2\times\cos120^\circ$

$=-2$

また　$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

よって　$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\left(\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}\right)$

$=|\overrightarrow{AB}|^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\dfrac{2}{9}|\overrightarrow{BC}|^2$

$=2^2+(-2)+\dfrac{2}{9}\times2^2=\dfrac{26}{9}$