数学演習（平面ベクトル）H２３．１２．２７　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1．3 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) を頂点とする △ABC について，次の点の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

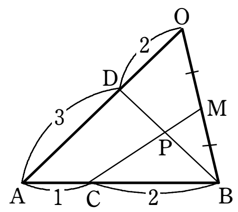
(1)　辺 BC の中点を M としたとき，線分 AM を 2 : 3 に内分する点 N

(2)　△ABC の重心を G としたとき，線分 AG を 5 : 3 に外分する点 D

2．△OAB において，OA=3，OB=4，AB=2 とする。△OAB の重心を G，内心を I とするとき，$\overrightarrow{OG}$，$\overrightarrow{OI}$ をそれぞれ $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ で表せ。

3．三角形 OAB において辺 OA の中点を P，辺 OB を 1 : 2 に内分する点を Q とする。OA=9，OB=6 であり，$\angle AOB=\theta$ とする。$\overrightarrow{AQ}$ と $\overrightarrow{BP}$ が垂直であるとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

4．△OAB において，辺 OB の中点を M，辺 AB を 1 : 2 に内分する点を C，辺 OA を 2 : 3 に内分する点を D とし，線分 CM と線分 BD の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。また，BP : PD と CP : PM を求めよ。



5．三角形 ABC と点 P があり，$4\overrightarrow{PA}+5\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ を満たしている。

(1)　点 P の位置をいえ。

(2)　面積比 △PAB : △PBC : △PCA を求めよ。

6．平行四辺形 ABCD において，辺 AB の中点を M，辺 BC を 1 : 2 に内分する点を E，辺 CD を 3 : 1 に内分する点を F とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とするとき

(1)　線分 CM と FE の交点を P とするとき，$\overrightarrow{AP}$ を $\vec{b}$，$\vec{d}$ で表せ。

(2)　直線 AP と対角線 BD の交点を Q とするとき，$\overrightarrow{AQ}$ を $\vec{b}$，$\vec{d}$ で表せ。

7．△OAB において，OA=2，OB=3，AB=4 である。点 O から辺 AB に下ろした垂線を OH とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおくとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

8．平行四辺形 ABCD において，対角線 AC を 2 : 3 に内分する点を L，辺 AB を 2 : 3 に内分する点を M，線分 MC を 4 : 15 に内分する点を N とするとき，3 点 D，L，N は一直線上にあることを証明せよ。また，DN : DL を求めよ。

9．OA$=3$，OB$=2$，$\angle$AOB$=60°$ である $\triangle$OAB において，その外心を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

10. O$(0,\ 0)$，A$(2,\ 4)$，B$(-2,\ 2)$ とする。実数 s，t が次の条件を満たしながら変化するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす点 P の存在範囲を図示せよ。

(1) $s+4t=2$

(2) $2s+t\leqq\frac{1}{2}$，$s\geqq0$，$t\geqq0$

11. Oを原点，A$(2,\ 1)$，B$(1,\ 2)$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ (s，t は実数) とする。s，t が次の関係を満たしながら変化するとき，点 P の描く図形を図示せよ。

(1) $1\leqq s\leqq2$，$0\leqq t\leqq1$

(2) $1\leqq s+t\leqq2$，$s\geqq0$，$t\geqq0$

12. 点 A$(-1,\ 2)$ から直線 $x-3y+2=0$ に垂線を引き，この直線との交点を H とする。点 H の座標と線分 AH の長さをベクトルを用いて求めよ。

13. 鋭角三角形 ABC の外心 O から直線 BC，CA，AB に下ろした垂線の足を，それぞれ P，Q，R とするとき $\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+3\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{0}$ が成立しているとする。

(1) $5\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OB}}+3\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ が成り立つことを示せ。

(2) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を求めよ。

(3) $\angle$A の大きさを求めよ。

1．3点 A($\vec{a}$), B($\vec{b}$), C($\vec{c}$) を頂点とする△ABCについて，次の点の位置ベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

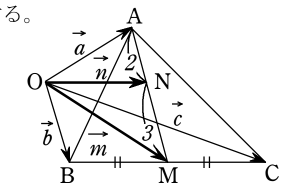
(1) 辺BCの中点をMとしたとき，線分AMを2 : 3に内分する点N

(2) △ABCの重心をGとしたとき，線分AGを5 : 3に外分する点D

解答　(1) $\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{c}$　　(2) $-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{b}+\frac{5}{6}\vec{c}$

解説

(1) 2点M, Nの位置ベクトルを，それぞれ $\vec{m}$, $\vec{n}$ とする。



$\vec{m}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$ であるから

$$\vec{n}=\frac{3\vec{a}+2\vec{m}}{2+3}=\frac{1}{5}\left\{3\vec{a}+2\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)\right\}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{c}$$

(2) 2点D, Gの位置ベクトルを，それぞれ $\vec{d}$, $\vec{g}$ とする。

$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ であるから

$$\vec{d}=\frac{-3\vec{a}+5\vec{g}}{5+(-3)}=\frac{1}{2}\left\{-3\vec{a}+5\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)\right\}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{b}+\frac{5}{6}\vec{c}$$

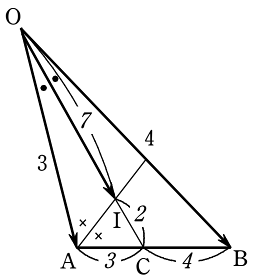
2．△OABにおいて，OA=3, OB=4, AB=2とする。△OABの重心をG，内心をIとするとき，$\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{OI}$ をそれぞれ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ で表せ。

解答　$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{3}$,　$\overrightarrow{OI}=\frac{4}{9}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

解説

Gは三角形OABの重心であるから

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{3}$$



また，OIと辺ABの交点をCとすると，

OIは∠AOBの二等分線であるから

AC : CB=OA : OB=3 : 4

また，AIは∠OABの二等分線であるから

OI : IC=OA : AC=3 : $\frac{3}{7}\cdot 2$=7 : 2

よって　$\overrightarrow{OI}=\frac{7}{9}\overrightarrow{OC}=\frac{7}{9}\cdot\frac{4\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}}{3+4}=\frac{4}{9}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

3．三角形OABにおいて辺OAの中点をP，辺OBを1 : 2に内分する点をQとする。OA=9, OB=6であり，∠AOB=θとする。$\overrightarrow{AQ}$と$\overrightarrow{BP}$が垂直であるとき，$\cos\theta$の値を求めよ。

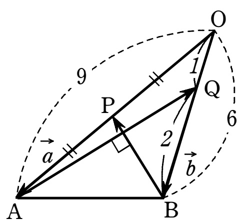
解答　$\cos\theta=\frac{5}{6}$

解説

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおくと

$$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}=-\vec{a}+\frac{\vec{b}}{3},$$

$$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}=\frac{\vec{a}}{2}-\vec{b}$$



よって，$|\vec{a}|=9$, $|\vec{b}|=6$ であることから

$$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BP}=\left(-\vec{a}+\frac{\vec{b}}{3}\right)\cdot\left(\frac{\vec{a}}{2}-\vec{b}\right)$$

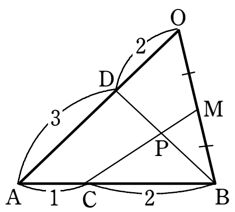
$$=-\frac{|\vec{a}|^2}{2}+\frac{7}{6}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{|\vec{b}|^2}{3}$$

$$=-\frac{9^2}{2}+\frac{7}{6}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{6^2}{3}=\frac{7}{6}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{105}{2}$$

$\overrightarrow{AQ}\perp\overrightarrow{BP}$ であるから　$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BP}=0$　　ゆえに　$\frac{7}{6}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{105}{2}=0$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=45$　　したがって　$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{45}{9\cdot 6}=\frac{5}{6}$

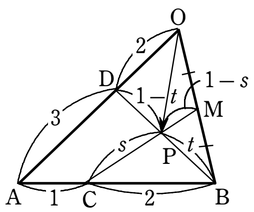
4．△OABにおいて，辺OBの中点をM，辺ABを1 : 2に内分する点をC，辺OAを2 : 3に内分する点をDとし，線分CMと線分BDの交点をPとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$を用いて表せ。また，BP : PDとCP : PMを求めよ。



解答　$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}$, BP : PD=5 : 4，CP : PM=2 : 1

解説

CP : PM=s : $(1-s)$ とすると



$$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OC}+s\overrightarrow{OM}=(1-s)\left(\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{1+2}\right)+s\left(\frac{1}{2}\vec{b}\right)$$

$$=\frac{2(1-s)}{3}\vec{a}+\frac{2(1-s)+3s}{6}\vec{b}$$

$$=\frac{2(1-s)}{3}\vec{a}+\frac{2+s}{6}\vec{b}$$

BP : PD=t : $(1-t)$ とすると

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OD}=(1-t)\vec{b}+t\left(\frac{2}{5}\vec{a}\right)=\frac{2}{5}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$$

$\overrightarrow{OP}$の$\vec{a}$, $\vec{b}$を用いた表し方は1通りであるから

$$\frac{2(1-s)}{3}=\frac{2}{5}t,\quad \frac{2+s}{6}=1-t$$

これを解くと　$s=\frac{2}{3}$, $t=\frac{5}{9}$　　したがって　$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}$

また，BP : PD=t : $(1-t)$=$\frac{5}{9}$: $\left(1-\frac{5}{9}\right)$=5 : 4

CP : PM=s : $(1-s)$=$\frac{2}{3}$: $\left(1-\frac{2}{3}\right)$=2 : 1

5．三角形ABCと点Pがあり，$4\overrightarrow{PA}+5\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$を満たしている。

(1) 点Pの位置をいえ。

(2) 面積比△PAB : △PBC : △PCAを求めよ。

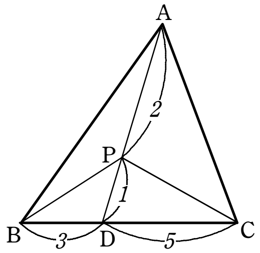
解答　(1) 線分BCを3 : 5に内分する点をDとしたとき，線分ADを2 : 1に内分する点

(2) 3 : 4 : 5

解説

(1) 等式から　$-4\overrightarrow{AP}+5(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+3(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\vec{0}$

ゆえに　$\overrightarrow{AP}=\frac{5\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{12}=\frac{2}{3}\times\frac{5\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{8}$



ここで，$\overrightarrow{AD}=\frac{5\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{8}$ とおくと，点Dは線分BCを3 : 5に内分する点であり　$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

よって　AP : PD=2 : 1

ゆえに，点Pは，線分BCを3 : 5に内分する点をDとしたとき，線分ADを2 : 1に内分する点である。

(2) △ABCの面積をSとすると　△ABD=$\frac{3}{8}S$, △ADC=$\frac{5}{8}S$

ゆえに　△PAB=$\frac{2}{3}$△ABD=$\frac{1}{4}S$, △PCA=$\frac{2}{3}$△ADC=$\frac{5}{12}S$,

△PBD=$\frac{1}{3}$△ABD=$\frac{1}{8}S$, △PDC=$\frac{1}{3}$△ADC=$\frac{5}{24}S$

ゆえに　△PAB : △PBC : △PCA=$\frac{1}{4}S$: $\left(\frac{1}{8}S+\frac{5}{24}S\right)$: $\frac{5}{12}S$

=3 : 4 : 5

6．平行四辺形ABCDにおいて，辺ABの中点をM，辺BCを1 : 2に内分する点をE，辺CDを3 : 1に内分する点をFとする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とするとき

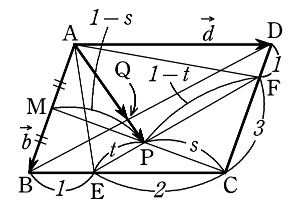
(1) 線分CMとFEの交点をPとするとき，$\overrightarrow{AP}$を$\vec{b}$, $\vec{d}$で表せ。

(2) 直線APと対角線BDの交点をQとするとき，$\overrightarrow{AQ}$を$\vec{b}$, $\vec{d}$で表せ。

解答　(1) $\overrightarrow{AP}=\frac{10}{13}\vec{b}+\frac{7}{13}\vec{d}$　　(2) $\overrightarrow{AQ}=\frac{10}{17}\vec{b}+\frac{7}{17}\vec{d}$

解説

(1) CP : PM=s : $(1-s)$, EP : PF=t : $(1-t)$ とすると



$$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AM}+(1-s)\overrightarrow{AC}=s\cdot\frac{1}{2}\vec{b}+(1-s)(\vec{b}+\vec{d})$$

$$=\left(1-\frac{s}{2}\right)\vec{b}+(1-s)\vec{d}$$

$$\overrightarrow{AP}=(1-t)\overrightarrow{AE}+t\overrightarrow{AF}$$

$$=(1-t)\left(\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{d}\right)+t\left(\vec{d}+\frac{1}{4}\vec{b}\right)$$

$$=\left(1-\frac{3}{4}t\right)\vec{b}+\frac{1+2t}{3}\vec{d}$$

$\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{d}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\not\parallel\vec{d}$ であるから　$1-\frac{s}{2}=1-\frac{3}{4}t$, $1-s=\frac{1+2t}{3}$

これを解いて　$s=\frac{6}{13}$, $t=\frac{4}{13}$　　したがって　$\overrightarrow{AP}=\frac{10}{13}\vec{b}+\frac{7}{13}\vec{d}$

(2) 点Qは直線AP上にあるから，$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}$ (kは実数) とおける。

よって　$\overrightarrow{AQ}=k\left(\frac{10}{13}\vec{b}+\frac{7}{13}\vec{d}\right)=\frac{10}{13}k\vec{b}+\frac{7}{13}k\vec{d}$

点Qは直線BD上にあるから　$\frac{10}{13}k+\frac{7}{13}k=1$　　ゆえに　$k=\frac{13}{17}$

したがって　$\overrightarrow{AQ}=\frac{10}{17}\vec{b}+\frac{7}{17}\vec{d}$

7．△OABにおいて，OA=2, OB=3, AB=4である。点Oから辺ABに下ろした垂線をOHとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおくとき，$\overrightarrow{OH}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$で表せ。

解答　$\overrightarrow{OH}=\frac{21}{32}\vec{a}+\frac{11}{32}\vec{b}$

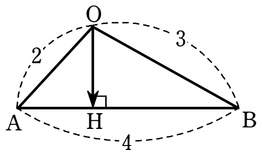
解説

$|\vec{b}-\vec{a}|=4$ から　$|\vec{b}-\vec{a}|^2=16$

よって　$|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=16$

ゆえに　$3^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+2^2=16$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{3}{2}$　……①



$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$ であるから

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$　……②

ここで，AH : HB$=t:(1-t)$ とすると，① から

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OH}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})$

$=(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}-(1-t)\vec{a}\cdot\vec{a}+t\vec{b}\cdot\vec{b}-t\vec{a}\cdot\vec{b}$

$=(t-1)|\vec{a}|^2+(1-2t)\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2$

$=4(t-1)+(1-2t)\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)+9t=16t-\dfrac{11}{2}$

ゆえに，② から　$16t-\dfrac{11}{2}=0$　　よって　$t=\dfrac{11}{32}$

ゆえに　$\overrightarrow{OH}=\dfrac{21}{32}\vec{a}+\dfrac{11}{32}\vec{b}$

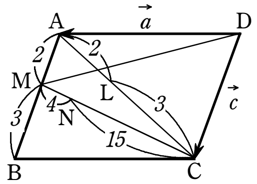
8．平行四辺形 ABCD において，対角線 AC を $2:3$ に内分する点を L，辺 AB を $2:3$ に内分する点を M，線分 MC を $4:15$ に内分する点を N とするとき，3 点 D，L，N は一直線上にあることを証明せよ。また，DN : DL を求めよ。

解答　証明略　DN : DL$=25:19$

解説

$\overrightarrow{DA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{DC}=\vec{c}$ とすると　$\overrightarrow{DL}=\dfrac{3\vec{a}+2\vec{c}}{5}$　……①

$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\dfrac{2}{5}\vec{c}$ であるから



$\overrightarrow{DN}=\dfrac{15\overrightarrow{DM}+4\overrightarrow{DC}}{19}=\dfrac{15\left(\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{c}\right)+4\vec{c}}{19}$

$=\dfrac{15\vec{a}+10\vec{c}}{19}=\dfrac{5}{19}(3\vec{a}+2\vec{c})$　……②

①，② から　$\overrightarrow{DN}=\dfrac{25}{19}\overrightarrow{DL}$　……③

したがって，3 点 D，L，N は一直線上にある。

また，③より　DN : DL$=25:19$

9．OA$=3$，OB$=2$，$\angle$AOB$=60°$ である $\triangle$OAB において，その外心を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

解答　$\overrightarrow{OP}=\dfrac{4}{9}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}$

解説

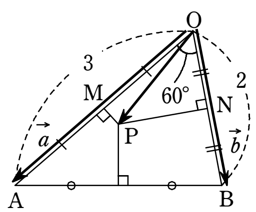
$\overrightarrow{OP}=s\vec{a}+t\vec{b}$（$s$，$t$ は実数）とおく。

辺 OA，OB の中点をそれぞれ M，N とすると

PM$\perp$OA，PN$\perp$OB

よって　$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=OM\times$OA　……①

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}=ON\times$OB　……②



が成り立つ。ここで，OM$=\dfrac{3}{2}$，ON$=1$ より①，②から

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=OM\times$OA$=\dfrac{3}{2}\times3=\dfrac{9}{2}$……③

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}=ON\times$OB$=1\times2=2$……④

ここで

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=(s\vec{a}+t\vec{b})\cdot\vec{a}=s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}$……⑤

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}=(s\vec{a}+t\vec{b})\cdot\vec{b}=s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2$……⑥

よって　$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$\angle$AOB$=60°$ であるから　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times2\times\cos60°=3$

③，⑤より　$s\cdot3^2+t\cdot3=\dfrac{9}{2}$　より　$6s+2t=3$

④，⑥より　$s\cdot3+t\cdot2^2=2$　より　$3s+4t=2$

解いて　$s=\dfrac{4}{9}$，$t=\dfrac{1}{6}$　　したがって　$\overrightarrow{OP}=\dfrac{4}{9}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}$

10．O$(0,\ 0)$，A$(2,\ 4)$，B$(-2,\ 2)$ とする。実数 s，t が次の条件を満たしながら変化するとき，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ を満たす点 P の存在範囲を図示せよ。

(1)　$s+4t=2$　　(2)　$2s+t\leqq\dfrac{1}{2}$，$s\geqq0$，$t\geqq0$

解説

(1)　$s+4t=2$ から　$\dfrac{s}{2}+2t=1$

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{s}{2}(2\overrightarrow{OA})+2t\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$

$\dfrac{s}{2}=s'$，$2t=t'$，$2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ とおく

と　$\overrightarrow{OP}=s'\overrightarrow{OA'}+t'\overrightarrow{OB'}$，$s'+t'=1$

よって，点 P の存在範囲は 直線 A′B′ である。[図]

(2)　$2s+t\leqq\dfrac{1}{2}$ から　$4s+2t\leqq1$

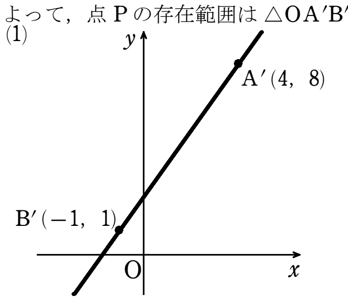
$\overrightarrow{OP}=4s\left(\dfrac{1}{4}\overrightarrow{OA}\right)+2t\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$

$4s=s'$，$2t=t'$，$\dfrac{1}{4}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ とおくと

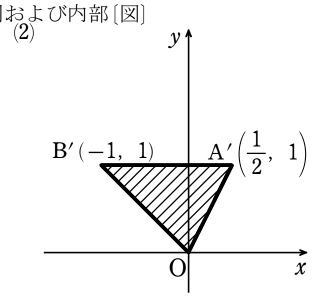
$\overrightarrow{OP}=s'\overrightarrow{OA'}+t'\overrightarrow{OB'}$，$s'+t'\leqq1$，$s'\geqq0$，$t'\geqq0$

よって，点 P の存在範囲は $\triangle$OA′B′ の周および内部[図]

(1)



(2)



11．O を原点，A$(2,\ 1)$，B$(1,\ 2)$，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$（$s$，$t$ は実数）とする。s，t が次の関係を満たしながら変化するとき，点 P の描く図形を図示せよ。

(1)　$1\leqq s\leqq2$，$0\leqq t\leqq1$　　(2)　$1\leqq s+t\leqq2$，$s\geqq0$，$t\geqq0$

解説

(1)　$s=k$ として固定するとき，$k\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OQ}$，$k\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OR}$ とおくと，P は図の線分 QR 上を動く。

更に，k を $1\leqq k\leqq2$ の範囲で動かすと，Q は図の線分 AA′ 上を動く。

ゆえに，求める図形は図の斜線部分。ただし，境界線を含む。[図]

(2)　$s+t=k$ として固定する。このとき，$\dfrac{s}{k}+\dfrac{t}{k}=1$ であるから，$k\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OQ}$，

$k\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OR}$ とおいて

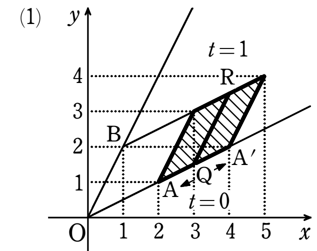
$\overrightarrow{OP}=\dfrac{s}{k}\overrightarrow{OQ}+\dfrac{t}{k}\overrightarrow{OR}$，$\dfrac{s}{k}+\dfrac{t}{k}=1$，$\dfrac{s}{k}\geqq0$，$\dfrac{t}{k}\geqq0$

よって，P は図の線分 QR 上を動く。

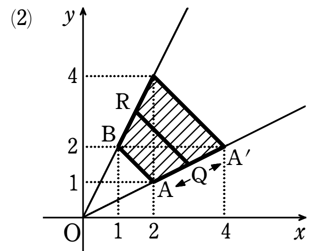
更に，k を $1\leqq k\leqq2$ の範囲で動かすと，Q は図の線分 AA′ 上を動く。

ゆえに，求める図形は図の斜線部分。ただし，境界線を含む。[図]

(1)



(2)



12．点 A$(-1,\ 2)$ から直線 $x-3y+2=0$ に垂線を引き，この直線との交点を H とする。点 H の座標と線分 AH の長さをベクトルを用いて求めよ。

解答　H$\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，AH$=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

解説

H$(s,\ t)$ とすると　$\overrightarrow{AH}=(s+1,\ t-2)$

直線 $x-3y+2=0$ の法線ベクトルを $\vec{n}=(1,\ -3)$ とすると　$\overrightarrow{AH}/\!/\vec{n}$

よって，$\overrightarrow{AH}=k\vec{n}$ となる実数 k が存在する。

したがって　$s+1=k$，$t-2=-3k$

ゆえに　$s=k-1$　……①，$t=-3k+2$　……②

また　$s-3t+2=0$

これに ①，② を代入して整理すると　$10k-5=0$

したがって　$k=\dfrac{1}{2}$

①，② から　$s=-\dfrac{1}{2}$，$t=\dfrac{1}{2}$　　よって　H$\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

$|\overrightarrow{AH}|=\left|\dfrac{1}{2}\vec{n}\right|$ から　AH$=|\overrightarrow{AH}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{1^2+(-3)^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

13．鋭角三角形 ABC の外心 O から直線 BC，CA，AB に下ろした垂線の足を，それぞれ P，Q，R とするとき $\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{OQ}+3\overrightarrow{OR}=\vec{0}$ が成立しているとする。

(1)　$5\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ が成り立つことを示せ。

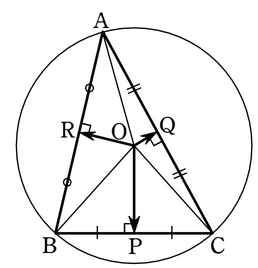
(2)　内積 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$ を求めよ。　　(3)　$\angle$A の大きさを求めよ。

解答　(1)　略　(2)　0　(3)　45°

解説

(1)　3 点 P，Q，R は，それぞれ辺 BC，CA，AB の中点であるから

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}$，$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}}{2}$，$\overrightarrow{OR}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$



これらを $\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{OQ}+3\overrightarrow{OR}=\vec{0}$ に代入して

$\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}+2\cdot\dfrac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}}{2}+3\cdot\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}=\vec{0}$

ゆえに　$5\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

(2)　(1) の結果から　$5\overrightarrow{OA}=-(4\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC})$

よって　$5|\overrightarrow{OA}|=|4\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}|$

両辺を 2 乗して　$25|\overrightarrow{OA}|^2=16|\overrightarrow{OB}|^2+24\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+9|\overrightarrow{OC}|^2$

$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$ であるから　$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0$

(3)　(2) から　$\angle$BOC$=90°$　$\angle$A と $\angle$BOC は 弧 BC に対する円周角と中心角の関係にあり，$\triangle$ABC は鋭角三角形であるから，O は $\triangle$ABC の内部にある。

よって　$\angle$A$=\dfrac{1}{2}\angle$BOC$=\dfrac{1}{2}\cdot90°=45°$