数学演習（平面ベクトル）Ｈ２３．１２．２７　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1．$|\vec{a}|=8$ のとき，$\vec{a}$ と平行で大きさが 2 であるベクトルを求めよ。

2．正六角形 ABCDEF において，辺 CD の中点を Q とし，辺 BC の中点を R とする。
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。
(1) $\overrightarrow{\mathrm{FE}}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$　(3) $\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$

3．平行四辺形 ABCD の辺 BC，CD の中点をそれぞれ P，Q とする。
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\vec{q}$ とするとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を $\vec{p}$，$\vec{q}$ を用いて表せ。

4．ベクトル $\vec{a}=(x,\ -1)$，$\vec{b}=(2,\ -3)$ に対し，$\vec{a}+3\vec{b}$ と $\vec{b}-\vec{a}$ が平行になるように，x の値を定めよ。

5．3 点 P(1，2)，Q(3，−2)，R(4，1) を頂点とする平行四辺形の第 4 の頂点 S の座標を求めよ。

6．$\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(-4,\ 3)$ がある。実数 t を変化させるとき，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさの最小値と，そのときの t の値を求めよ。

7．2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|\vec{a}-\vec{b}|=1$ を満たすとき，$|2\vec{a}-3\vec{b}|$ の値を求めよ。

8．ベクトル $\vec{a}=(-1,\ 2)$ に垂直な単位ベクトル $\vec{p}$ を求めよ。

9．p を正の数とし，ベクトル $\vec{a}=(1,\ 1)$ と $\vec{b}=(1,\ -p)$ があるとする。いま，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 60° のとき，p の値を求めよ。

10. (1)　2 つのベクトル $\vec{a}=(-1,\ 5)$，$\vec{b}=(3,\ -2)$ のなす角 θ を求めよ。

(2)　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$ で，$\vec{a}-\vec{b}$ と $6\vec{a}+\vec{b}$ が垂直であるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

(3)　$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

11. ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，$|\vec{a}-\vec{b}|=6$ とする。t を実数として，$\vec{a}+t\vec{b}$ と $\vec{b}$ が垂直になるとき，t の値を求めよ。

12. $\vec{0}$ でないベクトル $\vec{u}$，$\vec{v}$ について $2|\vec{u}|=3|\vec{v}|$ で，$\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角が $60°$ とする。$\vec{u}+\vec{v}$ と $7\vec{u}+t\vec{v}$ が垂直であるとき，t の値を求めよ。

13. (1)　$\triangle$OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ のとき，$\triangle$OAB の面積 S を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　(1) を利用して，3 点 O $(0,\ 0)$，A $(a_1,\ a_2)$，B $(b_1,\ b_2)$ を頂点とする $\triangle$OAB の面積 S を a_1，a_2，b_1，b_2 を用いて表せ。

14. 平面上のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $|5\vec{a}-2\vec{b}|=1$，$|2\vec{a}-3\vec{b}|=1$ を満たすように動くとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

1．$|\vec{a}|=8$ のとき，$\vec{a}$ と平行で大きさが 2 であるベクトルを求めよ。

解答　$\frac{1}{4}\vec{a}$，$-\frac{1}{4}\vec{a}$

解説

求めるベクトルを $\vec{x}$ とする。

$\vec{x}/\!/\vec{a}$ であるから，$\vec{x}=k\vec{a}$ となる実数 k がある。

このとき　$|\vec{x}|=|k\vec{a}|=|k||\vec{a}|$

$|\vec{x}|=2$，$|\vec{a}|=8$ であるから　$|k|=\frac{1}{4}$

すなわち　$k=\pm\frac{1}{4}$

よって，求めるベクトルは　$\frac{1}{4}\vec{a}$，$-\frac{1}{4}\vec{a}$

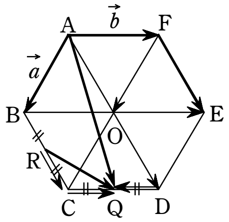
2．正六角形 ABCDEF において，辺 CD の中点を Q とし，辺 BC の中点を R とする。
$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{FE}$　　(2)　$\overrightarrow{AQ}$　　(3)　$\overrightarrow{RQ}$

解答　(1)　$\overrightarrow{FE}=\vec{a}+\vec{b}$　(2)　$\overrightarrow{AQ}=2\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$　(3)　$\overrightarrow{RQ}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$

解説

この正六角形の対角線 AD，BE，CF の交点を O とする。



(1)　$\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{OE}=\vec{a}+\vec{b}$

(2)　$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DQ}=2\overrightarrow{AO}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

$=2(\vec{a}+\vec{b})+\frac{1}{2}(-\vec{b})=2\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$

(3)　$\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{RC}+\overrightarrow{CQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

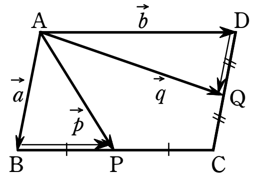
$=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})+\frac{1}{2}\vec{b}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$

3．平行四辺形 ABCD の辺 BC，CD の中点をそれぞれ P，Q とする。
$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AP}=\vec{p}$，$\overrightarrow{AQ}=\vec{q}$ とするとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を $\vec{p}$，$\vec{q}$ を用いて表せ。

解答　$\vec{a}=\frac{4}{3}\vec{p}-\frac{2}{3}\vec{q}$，$\vec{b}=-\frac{2}{3}\vec{p}+\frac{4}{3}\vec{q}$

解説

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}$，$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DQ}$ であるから



$\vec{p}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$　…… ①，$\vec{q}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$　…… ②

①×2－② から　$2\vec{p}-\vec{q}=\frac{3}{2}\vec{a}$

したがって　$\vec{a}=\frac{4}{3}\vec{p}-\frac{2}{3}\vec{q}$

①－②×2 から　$\vec{p}-2\vec{q}=-\frac{3}{2}\vec{b}$

したがって　$\vec{b}=-\frac{2}{3}\vec{p}+\frac{4}{3}\vec{q}$

4．ベクトル $\vec{a}=(x,\ -1)$，$\vec{b}=(2,\ -3)$ に対し，$\vec{a}+3\vec{b}$ と $\vec{b}-\vec{a}$ が平行になるように，x の値を定めよ。

解答　$x=\frac{2}{3}$

解説

$\vec{a}+3\vec{b}=(x,\ -1)+3(2,\ -3)=(x+6,\ -10)\neq\vec{0}$

$\vec{b}-\vec{a}=(2,\ -3)-(x,\ -1)=(2-x,\ -2)\neq\vec{0}$

$\vec{a}+3\vec{b}$ と $\vec{b}-\vec{a}$ が平行であるための条件は，$\vec{a}+3\vec{b}=k(\vec{b}-\vec{a})$ となる実数 k が存在することである。

よって　$(x+6,\ -10)=k(2-x,\ -2)$

ゆえに　$x+6=k(2-x)$ …… ①，$-10=-2k$ …… ②

② から　$k=5$　　このとき，① から　$x=\frac{2}{3}$

5．3 点 P(1，2)，Q(3，−2)，R(4，1) を頂点とする平行四辺形の第 4 の頂点 S の座標を求めよ。

解答　(2，5)，(6，−3)，(0，−1)

解説

求める第 4 の頂点 S の座標を $(x,\ y)$ とする。

[1]　四角形 PQRS が平行四辺形となる条件は　$\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{QR}$

$\overrightarrow{PS}=(x-1,\ y-2)$，$\overrightarrow{QR}=(1,\ 3)$ であるから　$x-1=1$，$y-2=3$

よって　$x=2$，$y=5$　　ゆえに　S(2，5)

[2]　四角形 PQSR が平行四辺形となる条件は　$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{QS}$

$\overrightarrow{PR}=(3,\ -1)$，$\overrightarrow{QS}=(x-3,\ y+2)$ であるから　$x-3=3$，$y+2=-1$

よって　$x=6$，$y=-3$　　ゆえに　S(6，−3)

[3]　四角形 PSQR が平行四辺形となる条件は　$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{SQ}$

$\overrightarrow{PR}=(3,\ -1)$，$\overrightarrow{SQ}=(3-x,\ -2-y)$ であるから　$3-x=3$，$-2-y=-1$

よって　$x=0$，$y=-1$　　ゆえに　S(0，−1)

別解　[1]　対角線 PR，QS の中点が一致することから，

点 $\left(\frac{1+4}{2},\ \frac{2+1}{2}\right)$ と点 $\left(\frac{3+x}{2},\ \frac{-2+y}{2}\right)$ が一致する。

よって　$x=2$，$y=5$　　したがって　S(2，5)

[2]，[3] も同様にして求められる。

6．$\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(-4,\ 3)$ がある。実数 t を変化させるとき，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさの最小値と，そのときの t の値を求めよ。

解答　$t=\frac{1}{5}$ のとき $|\vec{c}|$ は最小値 2

解説

$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}=(2,\ 1)+t(-4,\ 3)=(2-4t,\ 1+3t)$

よって　$|\vec{c}|^2=(2-4t)^2+(1+3t)^2=25t^2-10t+5$

$=25\left\{t^2-\frac{2}{5}t+\left(\frac{1}{5}\right)^2\right\}-25\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2+5$

$=25\left(t-\frac{1}{5}\right)^2+4$

ゆえに，$t=\frac{1}{5}$ のとき $|\vec{c}|^2$ は最小値 4 をとる。

$|\vec{c}|\geqq0$ であるから，$t=\frac{1}{5}$ のとき $|\vec{c}|$ は最小値 2 をとる。

7．2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|\vec{a}-\vec{b}|=1$ を満たすとき，$|2\vec{a}-3\vec{b}|$ の値を求めよ。

解答　$\sqrt{7}$

解説

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|\vec{a}-\vec{b}|=1$ であるから　$1^2=2^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+(\sqrt{3})^2$

したがって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

ここで　$|2\vec{a}-3\vec{b}|^2=(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-3\vec{b})=4|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2$

$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$ であるから

$|2\vec{a}-3\vec{b}|^2=4\times2^2-12\times3+9\times(\sqrt{3})^2=7$

$|2\vec{a}-3\vec{b}|\geqq0$ であるから　$|2\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{7}$

8．ベクトル $\vec{a}=(-1,\ 2)$ に垂直な単位ベクトル $\vec{p}$ を求めよ。

解答　$\vec{p}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$，$\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\ -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

解説

$\vec{p}=(x,\ y)$ とすると，$|\vec{p}|=1$ であるから　$x^2+y^2=1$　…… ①

$\vec{p}$ は $\vec{a}=(-1,\ 2)$ に垂直であるから　$\vec{p}\cdot\vec{a}=0$

よって　$(-1)\cdot x+2y=0$　　ゆえに　$x=2y$　…… ②

② を ① に代入すると　$(2y)^2+y^2=1$　　よって　$y=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

② から　$x=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$（複号同順）

したがって　$\vec{p}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$，$\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\ -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

9．p を正の数とし，ベクトル $\vec{a}=(1,\ 1)$ と $\vec{b}=(1,\ -p)$ があるとする。いま，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 60° のとき，p の値を求めよ。

解答　$p=2-\sqrt{3}$

解説

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1+1\cdot(-p)=1-p$，$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-p)^2}=\sqrt{1+p^2}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos60°$ から　$1-p=\sqrt{2}\sqrt{1+p^2}\cdot\frac{1}{2}$　…… ①

① の両辺を 2 乗して整理すると　$p^2-4p+1=0$　　よって　$p=2\pm\sqrt{3}$

ここで，① から右辺は正より　$0<p<1$　　ゆえに　$p=2-\sqrt{3}$

10．(1)　2 つのベクトル $\vec{a}=(-1,\ 5)$，$\vec{b}=(3,\ -2)$ のなす角 θ を求めよ。

(2)　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$ で，$\vec{a}-\vec{b}$ と $6\vec{a}+\vec{b}$ が垂直であるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求め

よ。

(3) $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

解答　(1) $\theta=135°$　(2) $\theta=60°$　(3) $\theta=120°$

解説

(1) $\cos\theta=\dfrac{(-1)\times3+5\times(-2)}{\sqrt{(-1)^2+5^2}\sqrt{3^2+(-2)^2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=135°$

(2) $(\vec{a}-\vec{b})\perp(6\vec{a}+\vec{b})$ であるから　$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(6\vec{a}+\vec{b})=0$

したがって　$6|\vec{a}|^2-5\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2=0$

$|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ を代入して　$6\times2^2-5\times2\times3\times\cos\theta-3^2=0$

ゆえに　$15(1-2\cos\theta)=0$　　よって　$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=60°$

(3) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=1^2-2\times1\times3\times\cos\theta+3^2=10-6\cos\theta$

$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$ より，$|\vec{a}-\vec{b}|^2=13$ であるから　$10-6\cos\theta=13$

よって　$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=120°$

11. ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，$|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $|\vec{a}-\vec{b}|=6$ とする。t を実数として，$\vec{a}+t\vec{b}$ と $\vec{b}$ が垂直になるとき，t の値を求めよ。

解答　$t=\dfrac{11}{32}$

解説

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=3^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+4^2=25-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=6^2$ であるから　$25-2\vec{a}\cdot\vec{b}=36$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{11}{2}$　…… ①

$(\vec{a}+t\vec{b})\perp\vec{b}$ から　$(\vec{a}+t\vec{b})\cdot\vec{b}=0$

すなわち　$\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0$

① から　$-\dfrac{11}{2}+t\times4^2=0$

ゆえに　$t=\dfrac{11}{32}$

12. $\vec{0}$ でないベクトル $\vec{u}$, $\vec{v}$ について $2|\vec{u}|=3|\vec{v}|$ で，$\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角が $60°$ とする。$\vec{u}+\vec{v}$ と $7\vec{u}+t\vec{v}$ が垂直であるとき，t の値を求めよ。

解答　$t=-12$

解説

$|\vec{u}|=\dfrac{3}{2}|\vec{v}|$ から　$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos60°=\dfrac{1}{2}|\vec{u}||\vec{v}|=\dfrac{3}{4}|\vec{v}|^2$

よって　$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(7\vec{u}+t\vec{v})=7|\vec{u}|^2+(t+7)\vec{u}\cdot\vec{v}+t|\vec{v}|^2$

$=\dfrac{63}{4}|\vec{v}|^2+\dfrac{3(t+7)}{4}|\vec{v}|^2+t|\vec{v}|^2$

$=\dfrac{7t+84}{4}|\vec{v}|^2$

$(\vec{u}+\vec{v})\perp(7\vec{u}+t\vec{v})$ であるから　$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(7\vec{u}+t\vec{v})=0$

ゆえに　$\dfrac{7t+84}{4}|\vec{v}|^2=0$

$|\vec{v}|\neq0$ であるから　$\dfrac{7t+84}{4}=0$　　よって　$t=-12$

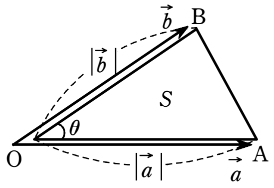
13. (1) $\triangle$OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ のとき，$\triangle$OAB の面積 S を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) (1) を利用して，3 点 O$(0, 0)$, A(a_1, a_2), B(b_1, b_2) を頂点とする $\triangle$OAB の面積 S を a_1, a_2, b_1, b_2 を用いて表せ。

解答　(1) $S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$　(2) $S=\dfrac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$

解説

(1) $\angle\mathrm{AOB}=\theta$ $(0°<\theta<180°)$ とすると



$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

また　$\sin\theta>0$

よって　$S=\dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=\dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=\dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)^2}$

$=\dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\times\dfrac{\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とすると　$\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$

$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=({a_1}^2+{a_2}^2)({b_1}^2+{b_2}^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2$

$={a_1}^2{b_2}^2+{a_2}^2{b_1}^2-2a_1b_1a_2b_2$

$=(a_1b_2-a_2b_1)^2$

ゆえに，(1) から　$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2}=\dfrac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$

14. 平面上のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が $|5\vec{a}-2\vec{b}|=1$, $|2\vec{a}-3\vec{b}|=1$ を満たすように動くとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

解答　$-\dfrac{3}{121}\leqq\vec{a}\cdot\vec{b}\leqq\dfrac{35}{121}$

解説

$5\vec{a}-2\vec{b}=\vec{p}$ …… ①，$2\vec{a}-3\vec{b}=\vec{q}$ …… ② とおく。

(①×3−②×2)÷11，(①×2−②×5)÷11 から　$\vec{a}=\dfrac{3}{11}\vec{p}-\dfrac{2}{11}\vec{q}$, $\vec{b}=\dfrac{2}{11}\vec{p}-\dfrac{5}{11}\vec{q}$

$|\vec{p}|=|\vec{q}|=1$ であるから

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{11^2}(3\vec{p}-2\vec{q})\cdot(2\vec{p}-5\vec{q})=\dfrac{1}{121}(6|\vec{p}|^2-19\vec{p}\cdot\vec{q}+10|\vec{q}|^2)$

$=\dfrac{1}{121}(16-19\vec{p}\cdot\vec{q})$　…… ③

$-|\vec{p}||\vec{q}|\leqq\vec{p}\cdot\vec{q}\leqq|\vec{p}||\vec{q}|$, $|\vec{p}|=|\vec{q}|=1$ から　$-1\leqq\vec{p}\cdot\vec{q}\leqq1$

よって，③ から　$\dfrac{1}{121}(16-19)\leqq\vec{a}\cdot\vec{b}\leqq\dfrac{1}{121}(16+19)$　　ゆえに　$-\dfrac{3}{121}\leqq\vec{a}\cdot\vec{b}\leqq\dfrac{35}{121}$