数学演習（平面ベクトル）Ｈ２４．９．１４　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

１．正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{CF}}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{EC}}$　(3) $\overrightarrow{\mathrm{FD}}$　(4) $\overrightarrow{\mathrm{DB}}$　(5) $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$

２．3 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle$ABC において，辺 BC を 2 : 3 に内分する点を D，辺 BC を 1 : 2 に外分する点を E，$\triangle$ABC の重心を G とする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$　(3) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$　(4) $\overrightarrow{\mathrm{GE}}$

３．次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積を求めよ。また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ も求めよ。

(1) $\vec{a}=(3,\ 2)$，$\vec{b}=(4,\ -6)$　(2) $\vec{a}=(-1,\ 3)$，$\vec{b}=(2,\ -1)$

４．$\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(3,\ 4)$ に対して，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ (t は実数) とする。

(1) $|\vec{c}|=\sqrt{10}$ を満たす t の値を求めよ。

(2) $|\vec{c}|$ の最小値とそのときの t の値を求めよ。

５．1 辺の長さが 2 の正三角形 ABC がある。辺 BC を 3 等分する点を，B に近い方から順に P，Q とするとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を求めよ。

６．$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 30° であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$|3\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めよ。

7．3 点 O (0, 0)，A (3, 1)，B (2, 4) に対して，次のものを求めよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　(2) $\angle\mathrm{AOB}$ の大きさ　(3) $\triangle\mathrm{OAB}$ の面積

8．$\triangle\mathrm{ABC}$ と 点 P について，等式 $2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+4\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ が成り立っている。直線 AP と辺 BC の交点を D とするとき，次のものを求めよ。

(1) BD : DC　(2) AP : PD

(3) $\triangle\mathrm{PBC} : \triangle\mathrm{PCA} : \triangle\mathrm{PAB}$

9．$\triangle\mathrm{OAB}$ の辺 OA 上に OP : PA＝1 : 2，辺 OB 上に OQ : QB＝2 : 1 となるように，それぞれ点 P，Q をとる。AQ と BP の交点を R とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ を用いて表せ。

10．平行四辺形 ABCD において，辺 AB の中点を M，辺 BC を 1 : 2 に内分する点を E，辺 CD を 3 : 1 に内分する点を F とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とするとき

(1) 線分 CM と FE の交点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{b}$，$\vec{d}$ で表せ。

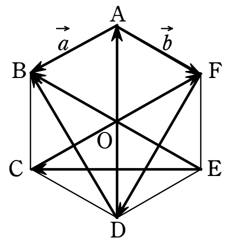
(2) 直線 AP と対角線 BD の交点を Q とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\vec{b}$，$\vec{d}$ で表せ。

数学演習（平面ベクトル）Ｈ２４．９．１４　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　)

1．正六角形ABCDEFにおいて，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{CF}$　(2) $\overrightarrow{EC}$　(3) $\overrightarrow{FD}$　(4) $\overrightarrow{DB}$　(5) $\overrightarrow{DA}$

解答　(1) $-2\vec{a}$　(2) $\vec{a}-\vec{b}$　(3) $2\vec{a}+\vec{b}$　(4) $-\vec{a}-2\vec{b}$　(5) $-2\vec{a}-2\vec{b}$



(1) $\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{BA}=2(-\vec{a})=-2\vec{a}$

(2) $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}=\vec{a}+(-\vec{b})$
$=\vec{a}-\vec{b}$

(3) $\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CD}=2\vec{a}+\vec{b}$

(4) $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EB}=-\vec{a}+(-2\vec{b})$
$=-\vec{a}-2\vec{b}$

(5) $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BA}=(-\vec{a}-2\vec{b})+(-\vec{a})$
$=-2\vec{a}-2\vec{b}$

別解　線分ADと線分BEの交点をOとすると
$\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EO}=-\vec{a}+(-\vec{b})=-\vec{a}-\vec{b}$

よって　$\overrightarrow{DA}=2\overrightarrow{DO}=2(-\vec{a}-\vec{b})=-2\vec{a}-2\vec{b}$

2．3点A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$を頂点とする△ABCにおいて，辺BCを2 : 3に内分する点をD，辺BCを1 : 2に外分する点をE，△ABCの重心をGとする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{AD}$　(2) $\overrightarrow{AE}$　(3) $\overrightarrow{AG}$　(4) $\overrightarrow{GE}$

解答　(1) $-\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}$　(2) $-\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$　(3) $-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$
(4) $-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{5}{3}\vec{b}-\frac{4}{3}\vec{c}$

$\overrightarrow{OD}=\frac{3\vec{b}+2\vec{c}}{2+3}=\frac{3}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}$，　$\overrightarrow{OE}=\frac{-2\vec{b}+\vec{c}}{1-2}=2\vec{b}-\vec{c}$，　$\overrightarrow{OG}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

(1) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\left(\frac{3}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}\right)-\vec{a}=-\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}$

(2) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OA}=(2\vec{b}-\vec{c})-\vec{a}=-\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$

(3) $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}-\vec{a}=\frac{1-3}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

(4) $\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OG}=(2\vec{b}-\vec{c})-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{6-1}{3}\vec{b}+\frac{-3-1}{3}\vec{c}$
$=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{5}{3}\vec{b}-\frac{4}{3}\vec{c}$

3．次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積を求めよ。また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ も求めよ。

(1) $\vec{a}=(3,\ 2)$，$\vec{b}=(4,\ -6)$　(2) $\vec{a}=(-1,\ 3)$，$\vec{b}=(2,\ -1)$

解答　(1) 0，$\theta=90°$　(2) -5，$\theta=135°$

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times4+2\times(-6)=0$

よって　$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=0$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=90°$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1\times2+3\times(-1)=-5$

よって　$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-5}{\sqrt{(-1)^2+3^2}\sqrt{2^2+(-1)^2}}$
$=\frac{-5}{5\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=135°$

4．$\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(3,\ 4)$ に対して，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$（t は実数）とする。

(1) $|\vec{c}|=\sqrt{10}$ を満たす t の値を求めよ。

(2) $|\vec{c}|$ の最小値とそのときの t の値を求めよ。

解答　(1) $t=-1,\ \frac{1}{5}$　(2) $t=-\frac{2}{5}$ のとき最小値1

$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}=(2,\ 1)+t(3,\ 4)=(2+3t,\ 1+4t)$

(1) $|\vec{c}|=\sqrt{10}$ であるから　$|\vec{c}|^2=(\sqrt{10})^2$　よって　$(2+3t)^2+(1+4t)^2=10$

整理すると　$5t^2+4t-1=0$　ゆえに　$(t+1)(5t-1)=0$

したがって　$t=-1,\ \frac{1}{5}$

(2) $|\vec{c}|^2=(2+3t)^2+(1+4t)^2=25t^2+20t+5$
$=25\left\{t^2+\frac{4}{5}t+\left(\frac{2}{5}\right)^2\right\}-25\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2+5=25\left(t+\frac{2}{5}\right)^2+1$

よって，$|\vec{c}|^2$ は $t=-\frac{2}{5}$ のとき最小値1をとる。

$|\vec{c}|\geqq0$ であるから，このとき $|\vec{c}|$ も最小となる。

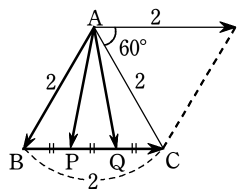
したがって　$t=-\frac{2}{5}$ のとき最小値1

5．1辺の長さが2の正三角形ABCがある。辺BCを3等分する点を，Bに近い方から順にP，Qとするとき，内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$ を求めよ。

解答　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-2$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\frac{26}{9}$

$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{BC}$ のなす角は120°であるから

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=2\times2\times\cos120°$
$=-2$



また　$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

よって　$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\right)$
$=|\overrightarrow{AB}|^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{2}{9}|\overrightarrow{BC}|^2$
$=2^2+(-2)+\frac{2}{9}\times2^2=\frac{26}{9}$

6．$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が30°であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$|3\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めよ。

解答　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$，$|3\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos30°=\sqrt{3}\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$

よって　$|3\vec{a}-\vec{b}|^2=(3\vec{a}-\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})=9|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$
$=9\times(\sqrt{3})^2-6\times3+2^2=13$

$|3\vec{a}-\vec{b}|\geqq0$ であるから　$|3\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$

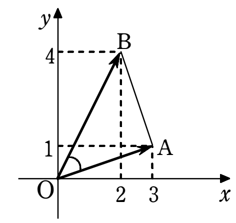
7．3点O(0, 0)，A(3, 1)，B(2, 4)に対して，次のものを求めよ。

(1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$　(2) ∠AOBの大きさ　(3) △OABの面積

解答　(1) 10　(2) 45°　(3) 5

(1) $\overrightarrow{OA}=(3,\ 1)$，$\overrightarrow{OB}=(2,\ 4)$ であるから
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3\times2+1\times4=10$

(2) $|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$，
$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$



よって　$\cos\angle AOB=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\frac{10}{\sqrt{10}\times2\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0°\leqq\angle AOB\leqq180°$ であるから　$\angle AOB=45°$

(3) $\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin45°=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times2\sqrt{5}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=5$

8．△ABCと点Pについて，等式 $2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ が成り立っている。直線APと辺BCの交点をDとするとき，次のものを求めよ。

(1) BD : DC　(2) AP : PD

(3) △PBC : △PCA : △PAB

解答　(1) 4 : 3　(2) 7 : 2　(3) 2 : 3 : 4

(1) $2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ から

$-2\overrightarrow{AP}+3(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+4(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\vec{0}$

よって　$\overrightarrow{AP}=\frac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{9}=\frac{7}{9}\cdot\frac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{7}=\frac{7}{9}\cdot\frac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{4+3}$

ゆえに，辺BCを4 : 3に内分する点をQとすると　$\overrightarrow{AP}=\frac{7}{9}\overrightarrow{AQ}$

よって，3点A，P，Qは一直線上にあり　AP : PQ＝7 : 2

すなわち，この点QがDであり　BD : DC＝4 : 3

(2) (1)から　$\overrightarrow{AP}=\frac{7}{9}\overrightarrow{AD}$　よって　AP : PD＝7 : 2

(3)　$\triangle\mathrm{PBD}:\triangle\mathrm{PCD}=\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=4:3$

よって，$\triangle\mathrm{PBD}=4S$，$\triangle\mathrm{PCD}=3S$ とおくと

$\triangle\mathrm{PBC}=\triangle\mathrm{PBD}+\triangle\mathrm{PCD}=4S+3S=7S$

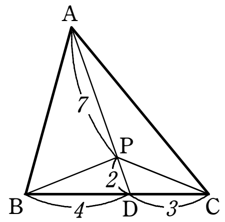
また　$\triangle\mathrm{PCA}:\triangle\mathrm{PCD}=\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=7:2$

ゆえに　$\triangle\mathrm{PCA}=\dfrac{7}{2}\triangle\mathrm{PCD}=\dfrac{7}{2}\times 3S=\dfrac{21}{2}S$

更に　$\triangle\mathrm{PAB}:\triangle\mathrm{PBD}=\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=7:2$

よって　$\triangle\mathrm{PAB}=\dfrac{7}{2}\triangle\mathrm{PBD}=\dfrac{7}{2}\times 4S=14S$

したがって　$\triangle\mathrm{PBC}:\triangle\mathrm{PCA}:\triangle\mathrm{PAB}=7S:\dfrac{21}{2}S:14S=2:3:4$



9. $\triangle\mathrm{OAB}$ の辺 OA 上に $\mathrm{OP}:\mathrm{PA}=1:2$，辺 OB 上に $\mathrm{OQ}:\mathrm{QB}=2:1$ となるように，それぞれ点 P，Q をとる。AQ と BP の交点を R とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ を用いて表せ。

解答　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{7}\vec{a}+\dfrac{4}{7}\vec{b}$

$\mathrm{AR}:\mathrm{RQ}=s:(1-s)$，$\mathrm{BR}:\mathrm{RP}=t:(1-t)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-s)\vec{a}+\dfrac{2}{3}s\vec{b}$　…… ①

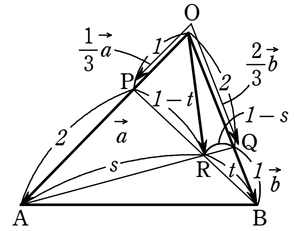
$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{3}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$　…… ②

①，② から　$(1-s)\vec{a}+\dfrac{2}{3}s\vec{b}=\dfrac{1}{3}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから

$1-s=\dfrac{1}{3}t$，$\dfrac{2}{3}s=1-t$

よって　$s=\dfrac{6}{7}$，$t=\dfrac{3}{7}$　　ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{7}\vec{a}+\dfrac{4}{7}\vec{b}$



10. 平行四辺形 ABCD において，辺 AB の中点を M，辺 BC を $1:2$ に内分する点を E，辺 CD を $3:1$ に内分する点を F とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とするとき

(1)　線分 CM と FE の交点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{b}$，$\vec{d}$ で表せ。

(2)　直線 AP と対角線 BD の交点を Q とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\vec{b}$，$\vec{d}$ で表せ。

解答　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{10}{13}\vec{b}+\dfrac{7}{13}\vec{d}$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{10}{17}\vec{b}+\dfrac{7}{17}\vec{d}$

(1)　$\mathrm{CP}:\mathrm{PM}=s:(1-s)$，$\mathrm{EP}:\mathrm{PF}=t:(1-t)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AM}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AC}}=s\cdot\dfrac{1}{2}\vec{b}+(1-s)(\vec{b}+\vec{d})$

$=\left(1-\dfrac{s}{2}\right)\vec{b}+(1-s)\vec{d}$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AE}}+t\overrightarrow{\mathrm{AF}}$

$=(1-t)\left(\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{d}\right)+t\left(\vec{d}+\dfrac{1}{4}\vec{b}\right)$

$=\left(1-\dfrac{3}{4}t\right)\vec{b}+\dfrac{1+2t}{3}\vec{d}$

$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{d}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\not\parallel\vec{d}$ であるから　$1-\dfrac{s}{2}=1-\dfrac{3}{4}t$，$1-s=\dfrac{1+2t}{3}$

これを解いて　$s=\dfrac{6}{13}$，$t=\dfrac{4}{13}$　　したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{10}{13}\vec{b}+\dfrac{7}{13}\vec{d}$

(2)　点 Q は直線 AP 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$（$k$ は実数）とおける。

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\left(\dfrac{10}{13}\vec{b}+\dfrac{7}{13}\vec{d}\right)=\dfrac{10}{13}k\vec{b}+\dfrac{7}{13}k\vec{d}$

点 Q は直線 BD 上にあるから　$\dfrac{10}{13}k+\dfrac{7}{13}k=1$　　ゆえに　$k=\dfrac{13}{17}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{10}{17}\vec{b}+\dfrac{7}{17}\vec{d}$