数学演習（平面ベクトル）Ｈ２４．９．１９　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１．$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$，$|\vec{a}-\vec{b}|=1$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

２．$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=2$ で，ベクトル $\vec{a}-4\vec{b}$，$\vec{a}$ が垂直であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

３．次の直線の方程式をベクトルを用いて求めよ。

点 A$(4,\ 6)$ を通り，ベクトル $\vec{n}=(3,\ -4)$ に垂直な直線

４．次の点 A を通り，ベクトル $\vec{d}$ に平行な直線の方程式をベクトルを用いて求めよ。

A$(-1,\ 2)$，$\vec{d}=(2,\ -3)$

５．$\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(3,\ 4)$ に対して，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$（t は実数）とする。

(1)　$|\vec{c}|=\sqrt{10}$ を満たす t の値を求めよ。

(2)　$|\vec{c}|$ の最小値とそのときの t の値を求めよ。

６．△ABC において，辺 AB を $3:1$ に内分する点を D，辺 AC を $2:3$ に内分する点を E とし，線分 BE と線分 CD の交点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

7．△OABにおいて，辺OAを2：3に内分する点をC，線分BCを2：1に内分する点をDとし，直線ODと辺ABの交点をEとする。このとき，OD：DEを求めよ。

8．△ABCと 点Pについて，等式 $2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ が成り立っている。直線APと辺BCの交点をDとするとき，次のものを求めよ。

(1)　BD：DC　　　(2)　AP：PD

(3)　△PBC：△PCA：△PAB

9．平行四辺形ABCDにおいて，辺ABを3：2に内分する点をE，対角線BDを2：5に内分する点をFとする。このとき，3点E，F，Cは一直線上にあることを証明せよ。

10．△OABに対し，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ (s，t は実数) とする。s，t が次の条件を満たしながら変化するとき，点Pの描く図形を図示せよ。

(1)　$s+t=3$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$　　　(2)　$s+t\leqq \dfrac{1}{3}$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

11．3点O(0，0)，A(2，0)，B(1，2)がある。実数 s，t が次の条件を満たしながら変化するとき，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ で表される点Pの存在範囲を図示せよ。

$0\leqq s\leqq 1$，$1\leqq t\leqq 3$

12．3点O(0，0)，A(2，1)，B(1，3)がある。実数 s，t が次の条件を満たしながら変化するとき，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ で表される点Pの存在範囲を図示せよ。

$2s+3t\leqq 6$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

1．$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$，$|\vec{a}-\vec{b}|=1$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

解答　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，$\theta=45^\circ$

$|\vec{a}-\vec{b}|=1$ であるから　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=1^2$

よって　$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=1$　　ゆえに　$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1$

したがって　$1^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+(\sqrt{2})^2=1$　　よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$

また　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{1}{1\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=45^\circ$

2．$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=2$ で，ベクトル $\vec{a}-4\vec{b}$，$\vec{a}$ が垂直であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

解答　$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$，$\theta=60^\circ$

$(\vec{a}-4\vec{b})\perp\vec{a}$ であるから　$(\vec{a}-4\vec{b})\cdot\vec{a}=0$

よって　$|\vec{a}|^2-4\vec{b}\cdot\vec{a}=0$

$|\vec{a}|=4$ であるから　$4^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

したがって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$

また　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{4}{4\times2}=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=60^\circ$

3．次の直線の方程式をベクトルを用いて求めよ。

点 A$(4,\ 6)$ を通り，ベクトル $\vec{n}=(3,\ -4)$ に垂直な直線

解答　$3x-4y+12=0$

直線上の任意の点を P$(x,\ y)$ とする。

$\overrightarrow{AP}=\vec{0}$ または $\overrightarrow{AP}\perp\vec{n}$ であるから　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$

ここで　$\overrightarrow{AP}=(x-4,\ y-6)$

よって　$3\times(x-4)-4\times(y-6)=0$

したがって　$3x-4y+12=0$

4．次の点 A を通り，ベクトル $\vec{d}$ に平行な直線の方程式をベクトルを用いて求めよ。

A$(-1,\ 2)$，$\vec{d}=(2,\ -3)$

解答　$3x+2y=1$

原点を O，直線上の任意の点を P$(x,\ y)$，t を実数とする。

$\overrightarrow{AP}$ は $\vec{d}$ に平行なので $\overrightarrow{AP}=t\vec{d}$ とおける

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$ より　$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t\vec{d}$　なので

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\vec{d}$ から　$(x,\ y)=(-1,\ 2)+t(2,\ -3)=(-1+2t,\ 2-3t)$

よって　$x=-1+2t$　……①，　$y=2-3t$　……②

①×3＋②×2 から t を消去して　$3x+2y=1$

5．$\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(3,\ 4)$ に対して，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$（t は実数）とする。

(1)　$|\vec{c}|=\sqrt{10}$ を満たす t の値を求めよ。

(2)　$|\vec{c}|$ の最小値とそのときの t の値を求めよ。

解答　(1)　$t=-1,\ \dfrac{1}{5}$　　(2)　$t=-\dfrac{2}{5}$ のとき最小値 1

$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}=(2,\ 1)+t(3,\ 4)=(2+3t,\ 1+4t)$

(1)　$|\vec{c}|=\sqrt{10}$ であるから　$|\vec{c}|^2=(\sqrt{10})^2$　　よって　$(2+3t)^2+(1+4t)^2=10$

整理すると　$5t^2+4t-1=0$　　ゆえに　$(t+1)(5t-1)=0$

したがって　$t=-1,\ \dfrac{1}{5}$

(2)　$|\vec{c}|^2=(2+3t)^2+(1+4t)^2=25t^2+20t+5$

$=25\left\{t^2+\dfrac{4}{5}t+\left(\dfrac{2}{5}\right)^2\right\}-25\cdot\left(\dfrac{2}{5}\right)^2+5=25\left(t+\dfrac{2}{5}\right)^2+1$

よって，$|\vec{c}|^2$ は $t=-\dfrac{2}{5}$ のとき最小値 1 をとる。

$|\vec{c}|\geqq0$ であるから，このとき $|\vec{c}|$ も最小となる。

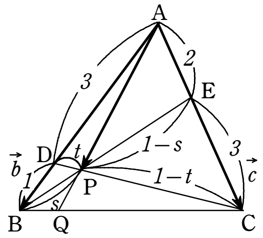
したがって　$t=-\dfrac{2}{5}$ のとき最小値 1

6．△ABC において，辺 AB を 3 : 1 に内分する点を D，辺 AC を 2 : 3 に内分する点を E とし，線分 BE と線分 CD の交点を P とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{AP}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

解答　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{9}{14}\vec{b}+\dfrac{1}{7}\vec{c}$

BP : PE$=s:(1-s)$ とすると

$\overrightarrow{AP}=(1-s)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AE}=(1-s)\vec{b}+\dfrac{2}{5}s\vec{c}$　……①



DP : PC$=t:(1-t)$ とすると

$\overrightarrow{AP}=(1-t)\overrightarrow{AD}+t\overrightarrow{AC}=\dfrac{3}{4}(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$

よって　$(1-s)\vec{b}+\dfrac{2}{5}s\vec{c}=\dfrac{3}{4}(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$

$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{c}\neq\vec{0}$ で，かつ $\vec{b}$，$\vec{c}$ は平行でないから

$1-s=\dfrac{3}{4}(1-t)$，$\dfrac{2}{5}s=t$

これを解いて　$s=\dfrac{5}{14}$，$t=\dfrac{1}{7}$

$s=\dfrac{5}{14}$ を ① に代入して　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{9}{14}\vec{b}+\dfrac{1}{7}\vec{c}$

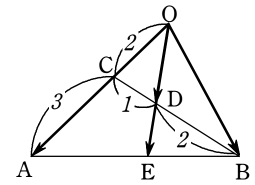
7．△OAB において，辺 OA を 2 : 3 に内分する点を C，線分 BC を 2 : 1 に内分する点を D とし，直線 OD と辺 AB の交点を E とする。このとき，OD : DE を求めよ。

解答　3 : 2

CD : DB=1 : 2 であるから

$\overrightarrow{OD}=\dfrac{2\overrightarrow{OC}+1\cdot\overrightarrow{OB}}{1+2}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

$=\dfrac{4}{15}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}$



点 E は直線 OD 上にあるから，$\overrightarrow{OE}=k\overrightarrow{OD}$ となる実数 k がある。

よって　$\overrightarrow{OE}=k\left(\dfrac{4}{15}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{4}{15}k\overrightarrow{OA}+\dfrac{k}{3}\overrightarrow{OB}$

点 E は直線 AB 上にあるから　$\dfrac{4}{15}k+\dfrac{k}{3}=1$　　したがって　$k=\dfrac{5}{3}$

よって，$\overrightarrow{OE}=\dfrac{5}{3}\overrightarrow{OD}$ であるから　OD : DE=3 : 2

8．△ABC と 点 P について，等式 $2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ が成り立っている。直線 AP と辺 BC の交点を D とするとき，次のものを求めよ。

(1)　BD : DC　　　(2)　AP : PD

(3)　△PBC : △PCA : △PAB

解答　(1)　4 : 3　　(2)　7 : 2　　(3)　2 : 3 : 4

(1)　$2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ から

$-2\overrightarrow{AP}+3(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+4(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\vec{0}$

よって　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{9}=\dfrac{7}{9}\cdot\dfrac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{7}=\dfrac{7}{9}\cdot\dfrac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{4+3}$

ゆえに，辺 BC を 4 : 3 に内分する点を Q とすると　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{7}{9}\overrightarrow{AQ}$

よって，3 点 A，P，Q は一直線上にあり　AP : PQ=7 : 2

すなわち，この点 Q が点 D であり　BD : DC=4 : 3

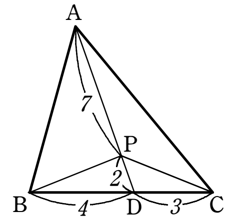
(2)　(1) から　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{7}{9}\overrightarrow{AD}$　　よって　AP : PD=7 : 2

(3)　△PBD : △PCD＝BD : DC＝4 : 3

よって，△PBD＝4S，△PCD＝3S とおくと

△PBC＝△PBD＋△PCD＝4S＋3S＝7S

また　△PCA : △PCD＝AP : PD＝7 : 2



ゆえに　△PCA$=\dfrac{7}{2}$△PCD$=\dfrac{7}{2}\times3S=\dfrac{21}{2}S$

更に　△PAB : △PBD＝AP : PD＝7 : 2

よって　△PAB$=\dfrac{7}{2}$△PBD$=\dfrac{7}{2}\times4S=14S$

したがって　△PBC : △PCA : △PAB$=7S:\dfrac{21}{2}S:14S=2:3:4$

9．平行四辺形 ABCD において，辺 AB を 3 : 2 に内分する点を E，対角線 BD を 2 : 5 に内分する点を F とする。このとき，3 点 E，F，C は一直線上にあることを証明せよ。

解答　略

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とすると

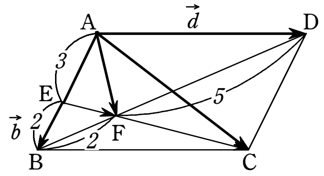
$\overrightarrow{AF}=\dfrac{5\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}}{2+5}=\dfrac{5\vec{b}+2\vec{d}}{7}$,　$\overrightarrow{AE}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}=\dfrac{3}{5}\vec{b}$,　$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{b}+\vec{d}$

よって　$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\dfrac{5\vec{b}+2\vec{d}}{7}-\dfrac{3}{5}\vec{b}$

$=\dfrac{2}{35}(2\vec{b}+5\vec{d})$

$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}=(\vec{b}+\vec{d})-\dfrac{3}{5}\vec{b}$

$=\dfrac{2\vec{b}+5\vec{d}}{5}$

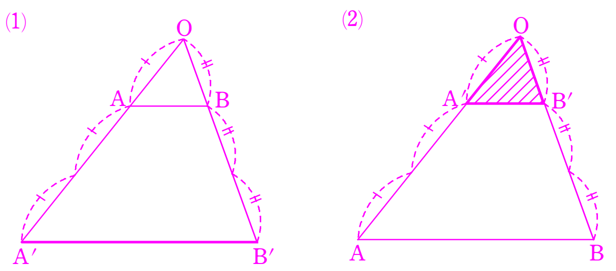


したがって，$\overrightarrow{EF}=\dfrac{2}{7}\overrightarrow{EC}$ であるから，3 点 E，F，C は一直線上にある。

10. △OAB に対し，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ (s，t は実数) とする。s，t が次の条件を満たしながら変化するとき，点 P の描く図形を図示せよ。

(1)　$s+t=3$，$s\geqq0$，$t\geqq0$　　　(2)　$s+t\leqq\dfrac{1}{3}$，$s\geqq0$，$t\geqq0$

解答　(1)，(2)　[図]　(2) は境界線を含む



(1)　$s+t=3$ から　　$\dfrac{s}{3}+\dfrac{t}{3}=1$

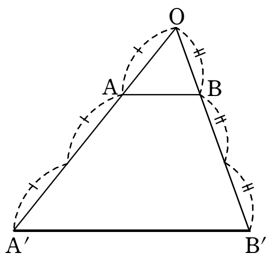
$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=\dfrac{s}{3}(3\overrightarrow{OA})+\dfrac{t}{3}(3\overrightarrow{OB})$

ここで，$\dfrac{s}{3}=s'$，$\dfrac{t}{3}=t'$，$3\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，

$3\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ とおくと

$\overrightarrow{OP}=s'\overrightarrow{OA'}+t'\overrightarrow{OB'}$，$s'+t'=1$，$s'\geqq0$，$t'\geqq0$

よって，点 P が描く図形は線分 A′B′　[図]



(2)　$s+t\leqq\dfrac{1}{3}$ から　　$3s+3t\leqq1$

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

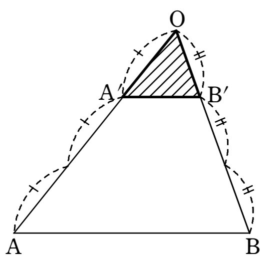
$=3s\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}\right)+3t\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right)$

ここで，$3s=s'$，$3t=t'$，$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，

$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ とおくと

$\overrightarrow{OP}=s'\overrightarrow{OA'}+t'\overrightarrow{OB'}$，$s'+t'\leqq1$，$s'\geqq0$，$t'\geqq0$

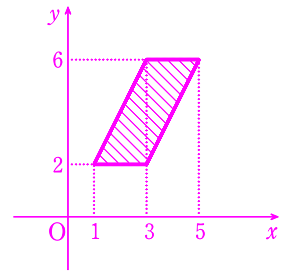
よって，点 P が描く図形は △OA′B′ の周および内部　[図]



11. 3 点 O (0，0)，A (2，0)，B (1，2) がある。実数 s，t が次の条件を満たしながら変化するとき，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ で表される点 P の存在範囲を図示せよ。

$0\leqq s\leqq1$，$1\leqq t\leqq3$

解答　[図] の斜線部分　ただし，境界線を含む



$s=k$ (k は定数) とすると，$0\leqq k\leqq1$ で

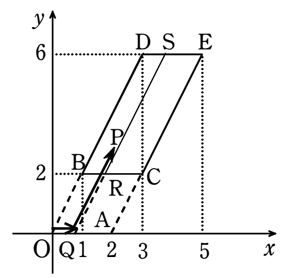
$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OA}$ とすると　　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+t\overrightarrow{OB}$

t の値が 1 から 3 まで変化すると，点 P は線分 RS 上を R から S まで動く。

ただし　$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OQ}+3\overrightarrow{OB}$

次に，k の値が 0 から 1 まで変化すると，点 R，S は，RS∥BD(∥CE) の状態を保ちながら，それぞれ線分 BC 上，DE 上を，B から C，D から E まで動く。

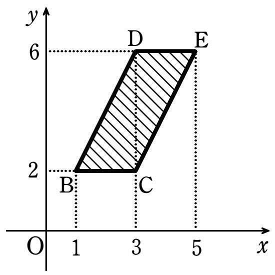


ただし　$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(3,\ 2)$，$\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OB}=(3,\ 6)$，$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=(5,\ 6)$

よって，点 P の存在範囲は　平行四辺形 BCED の周および内部

[図] の斜線部分。ただし，境界線を含む。

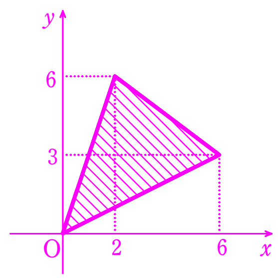
注意　平行四辺形の各頂点の座標をしっかり求める。



12. 3 点 O (0，0)，A (2，1)，B (1，3) がある。実数 s，t が次の条件を満たしながら変化するとき，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ で表される点 P の存在範囲を図示せよ。

$2s+3t\leqq6$，$s\geqq0$，$t\geqq0$

解答　[図] の斜線部分　ただし，境界線を含む



$2s+3t\leqq6$ の両辺を 6 で割ると　　$\dfrac{s}{3}+\dfrac{t}{2}\leqq1$

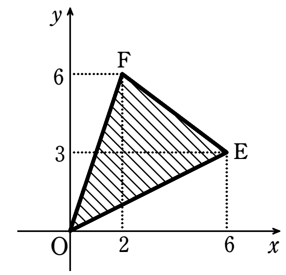
$\dfrac{s}{3}=s'$，$\dfrac{t}{2}=t'$ とおくと　$s'+t'\leqq1$，$s'\geqq0$，$t'\geqq0$

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{s}{3}(3\overrightarrow{OA})+\dfrac{t}{2}(2\overrightarrow{OB})$ であるから

$\overrightarrow{OP}=s'(3\overrightarrow{OA})+t'(2\overrightarrow{OB})$

よって，$\overrightarrow{OE}=3\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OF}=2\overrightarrow{OB}$ となるような点 E (6，3)，F (2，6) をとると，点 P の存在範囲は △OEF の周および内部 である。

[図] の斜線部分。ただし，境界線を含む。



注意　三角形の各頂点の座標をしっかり求める。