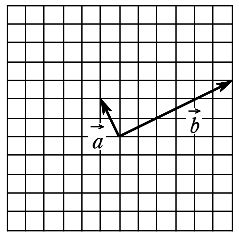
数学演習（平面ベクトル）Ｈ２３．１．１１　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1．右の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，次のベクトルを図示せよ。　$3\vec{a}-\dfrac{2}{3}\vec{b}$

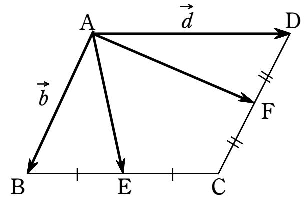


2．正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{CF}}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{EC}}$　(3) $\overrightarrow{\mathrm{FD}}$　(4) $\overrightarrow{\mathrm{DB}}$　(5) $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$

3．$\vec{a}=(3,\ 1)$，$\vec{b}=(-3,\ 2)$ のとき，$2\vec{a}+\vec{b}$ と平行な単位ベクトルを求めよ。

4．平行四辺形 ABCD において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とする。辺 BC，CD の中点をそれぞれ E，F とするとき



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ をそれぞれ $\vec{b}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

(2) $\vec{b}$，$\vec{d}$ をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を用いて表せ。

5．次の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が平行になるように，x の値を定めよ。

(1) $\vec{a}=(x,\ -20)$，$\vec{b}=(1,\ -4)$　(2) $\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(x^2-x,\ 3)$

6．$\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(3,\ 4)$ に対して，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ (t は実数) とする。

(1) $|\vec{c}|=\sqrt{10}$ を満たす t の値を求めよ。

(2) $|\vec{c}|$ の最小値とそのときの t の値を求めよ。

7．次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積を求めよ。また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ も求めよ。

(1) $\vec{a}=(3,\ 2)$，$\vec{b}=(4,\ -6)$　(2) $\vec{a}=(-1,\ 3)$，$\vec{b}=(2,\ -1)$

8．$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が $30°$ であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$|3\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めよ。

9．$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$，$|\vec{a}-\vec{b}|=1$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

10. ベクトル $\vec{a}=(1,\ -\sqrt{3})$ に垂直な単位ベクトルを求めよ。

11. $|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=2$ で，ベクトル $\vec{a}-4\vec{b}$，$\vec{a}$ が垂直であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

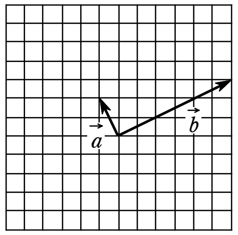
12. $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-4\vec{b}|=7$ のとき，$\vec{a}+t\vec{b}$，$\vec{a}+\vec{b}$ が垂直になるように，t の値を定めよ。

13. 3点 O$(0,\ 0)$，A$(3,\ 1)$，B$(2,\ 4)$ に対して，次のものを求めよ。

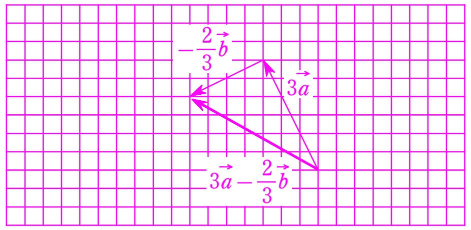
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　　(2)　$\angle\mathrm{AOB}$ の大きさ　　(3)　$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積

数学演習（平面ベクトル）Ｈ２３．１．１１　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　　　）

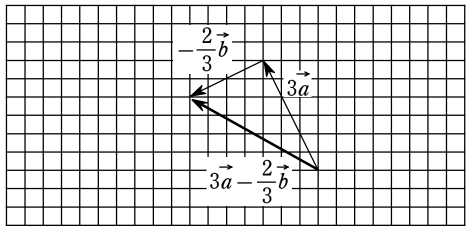
1．右の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，次のベクトルを図示せよ。　　$3\vec{a}-\dfrac{2}{3}\vec{b}$



解答



解説

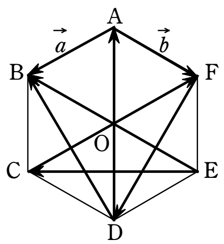


2．正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{CF}$　　(2) $\overrightarrow{EC}$　　(3) $\overrightarrow{FD}$　　(4) $\overrightarrow{DB}$　　(5) $\overrightarrow{DA}$

解答　(1) $-2\vec{a}$　　(2) $\vec{a}-\vec{b}$　　(3) $2\vec{a}+\vec{b}$　　(4) $-\vec{a}-2\vec{b}$　　(5) $-2\vec{a}-2\vec{b}$

解説



(1) $\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{BA}=2(-\vec{a})=-2\vec{a}$

(2) $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}=\vec{a}+(-\vec{b})$
$=\vec{a}-\vec{b}$

(3) $\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CD}=2\vec{a}+\vec{b}$

(4) $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EB}=-\vec{a}+(-2\vec{b})$
$=-\vec{a}-2\vec{b}$

(5) $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BA}=(-\vec{a}-2\vec{b})+(-\vec{a})$
$=-2\vec{a}-2\vec{b}$

別解　線分 AD と線分 BE の交点を O とすると
$\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EO}=-\vec{a}+(-\vec{b})=-\vec{a}-\vec{b}$
よって　$\overrightarrow{DA}=2\overrightarrow{DO}=2(-\vec{a}-\vec{b})=-2\vec{a}-2\vec{b}$

3．$\vec{a}=(3,\ 1)$，$\vec{b}=(-3,\ 2)$ のとき，$2\vec{a}+\vec{b}$ と平行な単位ベクトルを求めよ。

解答　$\left(\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$，$\left(-\dfrac{3}{5},\ -\dfrac{4}{5}\right)$

解説

$2\vec{a}+\vec{b}=2(3,\ 1)+(-3,\ 2)=(6,\ 2)+(-3,\ 2)$
$=(3,\ 4)$

よって　$|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

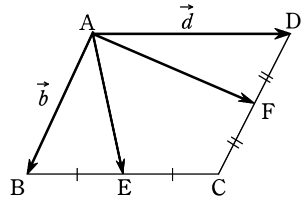
ゆえに，求めるベクトルは

$$\pm\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{|2\vec{a}+\vec{b}|}=\pm\frac{1}{5}(3,\ 4)\quad \text{より}\quad \left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right),\ \left(-\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$$

4．平行四辺形 ABCD において，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする。辺 BC，CD の中点をそれぞれ E，F とするとき

(1) $\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AF}$ をそれぞれ $\vec{b}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

(2) $\vec{b}$，$\vec{d}$ をそれぞれ $\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AF}$ を用いて表せ。



解答　(1) $\overrightarrow{AE}=\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{d}$，$\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{2}\vec{b}+\vec{d}$

(2) $\vec{b}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AE}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AF}$，$\vec{d}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AE}+\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AF}$

解説

(1) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

よって　$\overrightarrow{AE}=\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{d}$　…… ①

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

よって　$\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{2}\vec{b}+\vec{d}$　…… ②

(2) ①×2 から　$2\vec{b}+\vec{d}=2\overrightarrow{AE}$　…… ③
②×2 から　$\vec{b}+2\vec{d}=2\overrightarrow{AF}$　…… ④

③×2−④ から　$3\vec{b}=4\overrightarrow{AE}-2\overrightarrow{AF}$　　よって　$\vec{b}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AE}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AF}$

③−④×2 から　$-3\vec{d}=2\overrightarrow{AE}-4\overrightarrow{AF}$　　よって　$\vec{d}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AE}+\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AF}$

5．次の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が平行になるように，x の値を定めよ。

(1) $\vec{a}=(x,\ -20)$，$\vec{b}=(1,\ -4)$　　(2) $\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(x^2-x,\ 3)$

解答　(1) $x=5$　　(2) $x=-2,\ 3$

解説

(1) $\vec{a}$，$\vec{b}$ が平行になるための条件は，$\vec{a}=k\vec{b}$ となる実数 k があることである。

よって　$(x,\ -20)=k(1,\ -4)$　　ゆえに　$(x,\ -20)=(k,\ -4k)$

したがって　$x=k$　…… ①，　$-20=-4k$　…… ②

② から　$k=5$　　よって，① から　$x=5$

(2) $\vec{a}$，$\vec{b}$ が平行になるための条件は，$\vec{a}=k\vec{b}$ となる実数 k があることである。

よって　$(2,\ 1)=k(x^2-x,\ 3)$　　ゆえに　$(2,\ 1)=(k(x^2-x),\ 3k)$

したがって　$2=k(x^2-x)$　…… ①，　$1=3k$　…… ②

② から　$k=\dfrac{1}{3}$　　$k=\dfrac{1}{3}$ を ① に代入すると　$2=\dfrac{1}{3}(x^2-x)$

よって　$x^2-x-6=0$　　ゆえに　$(x+2)(x-3)=0$

したがって　$x=-2,\ 3$

注意　(1)，(2) とも，$\vec{a}=k\vec{b}$ (k は実数) の代わりに $\vec{b}=k\vec{a}$ (k は実数) とおいてもよい。

6．$\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(3,\ 4)$ に対して，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ (t は実数) とする。

(1) $|\vec{c}|=\sqrt{10}$ を満たす t の値を求めよ。

(2) $|\vec{c}|$ の最小値とそのときの t の値を求めよ。

解答　(1) $t=-1,\ \dfrac{1}{5}$　　(2) $t=-\dfrac{2}{5}$ のとき最小値 1

解説

$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}=(2,\ 1)+t(3,\ 4)=(2+3t,\ 1+4t)$

(1) $|\vec{c}|=\sqrt{10}$ であるから　$|\vec{c}|^2=(\sqrt{10})^2$　　よって　$(2+3t)^2+(1+4t)^2=10$

整理すると　$5t^2+4t-1=0$　　ゆえに　$(t+1)(5t-1)=0$

したがって　$t=-1,\ \dfrac{1}{5}$

(2) $|\vec{c}|^2=(2+3t)^2+(1+4t)^2=25t^2+20t+5$

$$=25\left\{t^2+\frac{4}{5}t+\left(\frac{2}{5}\right)^2\right\}-25\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2+5=25\left(t+\frac{2}{5}\right)^2+1$$

よって，$|\vec{c}|^2$ は $t=-\dfrac{2}{5}$ のとき最小値 1 をとる。

$|\vec{c}|\geqq 0$ であるから，このとき $|\vec{c}|$ も最小となる。

したがって　$t=-\dfrac{2}{5}$ のとき最小値 1

7．次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積を求めよ。また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ も求めよ。

(1) $\vec{a}=(3,\ 2)$，$\vec{b}=(4,\ -6)$　　(2) $\vec{a}=(-1,\ 3)$，$\vec{b}=(2,\ -1)$

解答　(1) 0，$\theta=90°$　　(2) -5，$\theta=135°$

解説

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times4+2\times(-6)=0$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=0$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=90°$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1\times2+3\times(-1)=-5$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-5}{\sqrt{(-1)^2+3^2}\sqrt{2^2+(-1)^2}}$

$=\dfrac{-5}{5\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=135°$

8．$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が $30°$ であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$|3\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めよ。

解答　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$，$|3\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$

解説

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 30°=\sqrt{3}\times 2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3$

よって　$|3\vec{a}-\vec{b}|^2=(3\vec{a}-\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})=9|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=9\times(\sqrt{3})^2-6\times 3+2^2=13$

$|3\vec{a}-\vec{b}|\geqq 0$ であるから　$|3\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$

9．$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$，$|\vec{a}-\vec{b}|=1$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

解答　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，$\theta=45°$

解説

$|\vec{a}-\vec{b}|=1$ であるから　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=1^2$

よって　$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=1$　　ゆえに　$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1$

したがって　$1^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+(\sqrt{2})^2=1$　　よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$

また　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{1}{1\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0°\leqq\theta\leqq 180°$ であるから　$\theta=45°$

10．ベクトル $\vec{a}=(1,\ -\sqrt{3})$ に垂直な単位ベクトルを求めよ。

解答　$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$

解説

求めるベクトルを $\vec{e}=(x,\ y)$ とすると，$|\vec{e}|=1$ から　$x^2+y^2=1$ …… ①

$\vec{a}\perp\vec{e}$ であるから　$\vec{a}\cdot\vec{e}=0$　　すなわち　$x-\sqrt{3}\,y=0$

よって　$x=\sqrt{3}\,y$ …… ②

② を ① に代入して整理すると　$y^2=\dfrac{1}{4}$

したがって　$y=\pm\dfrac{1}{2}$

② から　$y=\dfrac{1}{2}$ のとき　$x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$y=-\dfrac{1}{2}$ のとき　$x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ゆえに，$\vec{a}$ に垂直な単位ベクトルは　$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$

11．$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=2$ で，ベクトル $\vec{a}-4\vec{b}$，$\vec{a}$ が垂直であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

解答　$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$，$\theta=60°$

解説

$(\vec{a}-4\vec{b})\perp\vec{a}$ であるから　$(\vec{a}-4\vec{b})\cdot\vec{a}=0$

よって　$|\vec{a}|^2-4\vec{b}\cdot\vec{a}=0$

$|\vec{a}|=4$ であるから　$4^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

したがって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$

また　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{4}{4\times 2}=\dfrac{1}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq 180°$ であるから　$\theta=60°$

12．$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-4\vec{b}|=7$ のとき，$\vec{a}+t\vec{b}$，$\vec{a}+\vec{b}$ が垂直になるように，t の値を定めよ。

解答　$t=-\dfrac{12}{7}$

解説

$|\vec{a}-4\vec{b}|=7$ であるから　$|\vec{a}-4\vec{b}|^2=7^2$

よって　$|\vec{a}|^2-8\vec{a}\cdot\vec{b}+16|\vec{b}|^2=49$　　ゆえに　$3^2-8\vec{a}\cdot\vec{b}+16\times 2^2=49$

したがって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

$(\vec{a}+t\vec{b})\perp(\vec{a}+\vec{b})$ となるための条件は　$(\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=0$

すなわち　$|\vec{a}|^2+(1+t)\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0$

よって　$3^2+(1+t)\times 3+t\times 2^2=0$

したがって　$t=-\dfrac{12}{7}$

13．3 点 O (0，0)，A (3，1)，B (2，4) に対して，次のものを求めよ。

(1)　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$　　(2)　$\angle AOB$ の大きさ　　(3)　$\triangle OAB$ の面積

解答　(1)　10　　(2)　45°　　(3)　5

解説

(1)　$\overrightarrow{OA}=(3,\ 1)$，$\overrightarrow{OB}=(2,\ 4)$ であるから

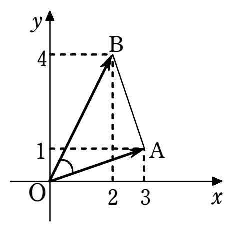
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3\times 2+1\times 4=10$

(2)　$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$，

$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

よって　$\cos\angle AOB=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\dfrac{10}{\sqrt{10}\times 2\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0°\leqq\angle AOB\leqq 180°$ であるから　$\angle AOB=45°$



(3)　$\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin 45°=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{10}\times 2\sqrt{5}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=5$