数学演習（平面ベクトル）Ｈ２２．５．１　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1．正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{CF}}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{EC}}$　(3) $\overrightarrow{\mathrm{FD}}$　(4) $\overrightarrow{\mathrm{DB}}$　(5) $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$

2．次の等式を満たす $\vec{x}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $4\vec{x}-3\vec{a}=\vec{x}+6\vec{b}$　(2) $2(\vec{a}-\vec{x})=-3(\vec{x}-3\vec{b})$

3．$\vec{a}=(3,\ 4)$，$\vec{b}=(-2,\ 3)$ のとき，次のベクトルを求めよ。

(1) $\vec{a}+\vec{b}$　(2) $\vec{a}-\vec{b}$　(3) $-3\vec{a}$

(4) $-2\vec{a}+4\vec{b}$　(5) $-3(-\vec{a}+2\vec{b})$

4．次の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が平行になるように，x の値を定めよ。

(1) $\vec{a}=(x,\ -20)$，$\vec{b}=(1,\ -4)$　(2) $\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(x^2-x,\ 3)$

5．$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする。次の場合の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(1) $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=6$，$\theta=45^\circ$　(2) $|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=8$，$\theta=120^\circ$

6．ベクトル $\vec{a}=(-1,\ \sqrt{3})$ に垂直で，大きさが 2 のベクトルを求めよ。

7．$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 30° であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$|3\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めよ。

8．$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$，$|\vec{a}-\vec{b}|=1$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

9. $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$ で，ベクトル $\vec{a}-4\vec{b}$, $\vec{a}$ が垂直であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

10. △ABC において，辺 AB を 3 : 1 に内分する点を D，辺 AC を 2 : 3 に内分する点を E とし，線分 BE と線分 CD の交点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

11. △OAB の辺 OA を 3 : 1 に内分する点を C，辺 OB を 4 : 1 に内分する点を D とし，辺 BC の中点を P とする。直線 OP と CD の交点を Q とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。また，CQ : QD を求めよ。

12. △OAB において，OA$=2$, OB$=3$, $\cos\angle\mathrm{AOB}=-\dfrac{1}{4}$ である。点 O から辺 AB に下ろした垂線を OH とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおくとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

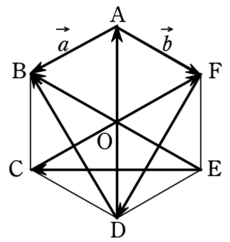
数学演習（平面ベクトル）Ｈ２２．５．１　　　　　　　　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　)

1．正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{CF}$　(2) $\overrightarrow{EC}$　(3) $\overrightarrow{FD}$　(4) $\overrightarrow{DB}$　(5) $\overrightarrow{DA}$

解答　(1) $-2\vec{a}$　(2) $\vec{a}-\vec{b}$　(3) $2\vec{a}+\vec{b}$　(4) $-\vec{a}-2\vec{b}$　(5) $-2\vec{a}-2\vec{b}$

解説



(1) $\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{BA}=2(-\vec{a})=-2\vec{a}$

(2) $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}=\vec{a}+(-\vec{b})$
$=\vec{a}-\vec{b}$

(3) $\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CD}=2\vec{a}+\vec{b}$

(4) $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EB}=-\vec{a}+(-2\vec{b})$
$=-\vec{a}-2\vec{b}$

(5) $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BA}=(-\vec{a}-2\vec{b})+(-\vec{a})$
$=-2\vec{a}-2\vec{b}$

別解　線分 AD と線分 BE の交点を O とすると
$\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EO}=-\vec{a}+(-\vec{b})=-\vec{a}-\vec{b}$
よって　$\overrightarrow{DA}=2\overrightarrow{DO}=2(-\vec{a}-\vec{b})=-2\vec{a}-2\vec{b}$

2．次の等式を満たす $\vec{x}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $4\vec{x}-3\vec{a}=\vec{x}+6\vec{b}$　(2) $2(\vec{a}-\vec{x})=-3(\vec{x}-3\vec{b})$

解答　(1) $\vec{x}=\vec{a}+2\vec{b}$　(2) $\vec{x}=-2\vec{a}+9\vec{b}$

解説

(1) 等式から　$4\vec{x}-\vec{x}=6\vec{b}+3\vec{a}$
よって　$3\vec{x}=3\vec{a}+6\vec{b}$　両辺を 3 で割って　$\vec{x}=\vec{a}+2\vec{b}$

(2) 等式から　$2\vec{a}-2\vec{x}=-3\vec{x}+9\vec{b}$
よって　$-2\vec{x}+3\vec{x}=9\vec{b}-2\vec{a}$　したがって　$\vec{x}=-2\vec{a}+9\vec{b}$

3．$\vec{a}=(3,\ 4)$，$\vec{b}=(-2,\ 3)$ のとき，次のベクトルを求めよ。

(1) $\vec{a}+\vec{b}$　(2) $\vec{a}-\vec{b}$　(3) $-3\vec{a}$
(4) $-2\vec{a}+4\vec{b}$　(5) $-3(-\vec{a}+2\vec{b})$

解答　(1) $(1,\ 7)$　(2) $(5,\ 1)$　(3) $(-9,\ -12)$　(4) $(-14,\ 4)$　(5) $(21,\ -6)$

解説

(1) $\vec{a}+\vec{b}=(3,\ 4)+(-2,\ 3)=(3-2,\ 4+3)=(1,\ 7)$

(2) $\vec{a}-\vec{b}=(3,\ 4)-(-2,\ 3)=(3-(-2),\ 4-3)=(5,\ 1)$

(3) $-3\vec{a}=-3(3,\ 4)=(-3\times3,\ -3\times4)=(-9,\ -12)$

(4) $-2\vec{a}+4\vec{b}=-2(3,\ 4)+4(-2,\ 3)=(-6,\ -8)+(-8,\ 12)$
$=(-6-8,\ -8+12)=(-14,\ 4)$

(5) $-3(-\vec{a}+2\vec{b})=3\vec{a}-6\vec{b}=3(3,\ 4)-6(-2,\ 3)$
$=(9,\ 12)+(12,\ -18)$
$=(9+12,\ 12-18)=(21,\ -6)$

4．次の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が平行になるように，x の値を定めよ。

(1) $\vec{a}=(x,\ -20)$，$\vec{b}=(1,\ -4)$　(2) $\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(x^2-x,\ 3)$

解答　(1) $x=5$　(2) $x=-2,\ 3$

解説

(1) $\vec{a}$，$\vec{b}$ が平行になるための条件は，$\vec{a}=k\vec{b}$ となる実数 k があることである。
よって　$(x,\ -20)=k(1,\ -4)$　ゆえに　$(x,\ -20)=(k,\ -4k)$
したがって　$x=k$ ……①，　$-20=-4k$ ……②
② から　$k=5$　よって，① から　$x=5$

(2) $\vec{a}$，$\vec{b}$ が平行になるための条件は，$\vec{a}=k\vec{b}$ となる実数 k があることである。
よって　$(2,\ 1)=k(x^2-x,\ 3)$　ゆえに　$(2,\ 1)=(k(x^2-x),\ 3k)$
したがって　$2=k(x^2-x)$ ……①，　$1=3k$ ……②
② から　$k=\dfrac{1}{3}$　$k=\dfrac{1}{3}$ を ① に代入すると　$2=\dfrac{1}{3}(x^2-x)$
よって　$x^2-x-6=0$　ゆえに　$(x+2)(x-3)=0$
したがって　$x=-2,\ 3$

注意　(1)，(2) とも，$\vec{a}=k\vec{b}$ (k は実数) の代わりに $\vec{b}=k\vec{a}$ (k は実数) とおいてもよい。

5．$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする。次の場合の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(1) $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=6$，$\theta=45^\circ$　(2) $|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=8$，$\theta=120^\circ$

解答　(1) $6\sqrt{2}$　(2) $-4\sqrt{3}$

解説

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=2\times6\times\cos45^\circ=2\times6\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=6\sqrt{2}$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\sqrt{3}\times8\times\cos120^\circ=\sqrt{3}\times8\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-4\sqrt{3}$

6．ベクトル $\vec{a}=(-1,\ \sqrt{3})$ に垂直で，大きさが 2 のベクトルを求めよ。

解答　$(\sqrt{3},\ 1)$ または $(-\sqrt{3},\ -1)$

解説

求めるベクトルを $\vec{b}=(x,\ y)$ とする。
$\vec{a}\perp\vec{b}$ であるから　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$　よって　$-x+\sqrt{3}y=0$
すなわち　$x=\sqrt{3}y$ ……①
$|\vec{b}|=2$ であるから　$|\vec{b}|^2=2^2$　よって　$x^2+y^2=4$
① を代入して　$(\sqrt{3}y)^2+y^2=4$　ゆえに，$y^2=1$ から　$y=\pm1$
① から　$y=1$ のとき　$x=\sqrt{3}$，　$y=-1$ のとき　$x=-\sqrt{3}$
したがって，求めるベクトルは　$(\sqrt{3},\ 1)$ または $(-\sqrt{3},\ -1)$

7．$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 30° であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$|3\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めよ。

解答　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$，$|3\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$

解説

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos30^\circ=\sqrt{3}\times2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3$

よって　$|3\vec{a}-\vec{b}|^2=(3\vec{a}-\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})=9|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$
$=9\times(\sqrt{3})^2-6\times3+2^2=13$

$|3\vec{a}-\vec{b}|\geqq0$ であるから　$|3\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$

8．$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$，$|\vec{a}-\vec{b}|=1$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

解答　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，$\theta=45^\circ$

解説

$|\vec{a}-\vec{b}|=1$ であるから　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=1^2$
よって　$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=1$　ゆえに　$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1$
したがって　$1^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+(\sqrt{2})^2=1$　よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$
また　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{1}{1\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=45^\circ$

9．$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=2$ で，ベクトル $\vec{a}-4\vec{b}$，$\vec{a}$ が垂直であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

解答　$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$，$\theta=60^\circ$

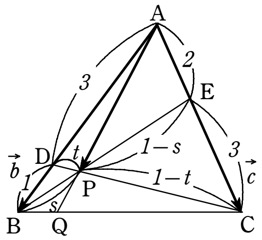
解説

$(\vec{a}-4\vec{b})\perp\vec{a}$ であるから　$(\vec{a}-4\vec{b})\cdot\vec{a}=0$
よって　$|\vec{a}|^2-4\vec{b}\cdot\vec{a}=0$
$|\vec{a}|=4$ であるから　$4^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
したがって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$
また　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{4}{4\times2}=\dfrac{1}{2}$
$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=60^\circ$

10. △ABCにおいて，辺ABを3 : 1に内分する点をD，辺ACを2 : 3に内分する点をEとし，線分BEと線分CDの交点をPとする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{AP}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

解答　$\overrightarrow{AP}=\frac{9}{14}\vec{b}+\frac{1}{7}\vec{c}$

解説



BP : PE $=s:(1-s)$ とすると

$$\overrightarrow{AP}=(1-s)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AE}=(1-s)\vec{b}+\frac{2}{5}s\vec{c} \quad \cdots\cdots ①$$

DP : PC $=t:(1-t)$ とすると

$$\overrightarrow{AP}=(1-t)\overrightarrow{AD}+t\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$$

よって　$(1-s)\vec{b}+\frac{2}{5}s\vec{c}=\frac{3}{4}(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$

$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{c}\neq\vec{0}$ で，かつ $\vec{b}$，$\vec{c}$ は平行でないから

$$1-s=\frac{3}{4}(1-t),\quad \frac{2}{5}s=t$$

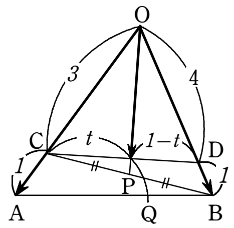
これを解いて　$s=\frac{5}{14}$，$t=\frac{1}{7}$

$s=\frac{5}{14}$ を ① に代入して　$\overrightarrow{AP}=\frac{9}{14}\vec{b}+\frac{1}{7}\vec{c}$

11. △OABの辺OAを3 : 1に内分する点をC，辺OBを4 : 1に内分する点をDとし，辺BCの中点をPとする。直線OPとCDの交点をQとするとき，$\overrightarrow{OQ}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。また，CQ : QDを求めよ。

解答　$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{4}{9}\overrightarrow{OB}$，CQ : QD $=5:4$

解説



CQ : QD $=t:(1-t)$ とすると

$$\overrightarrow{OQ}=(1-t)\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{OD}$$
$$=\frac{3}{4}(1-t)\overrightarrow{OA}+\frac{4}{5}t\overrightarrow{OB} \quad \cdots\cdots ①$$

また，3点O，P，Qは一直線上にあるから，$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}$ となる実数 k がある。

ここで　$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$

$$=\frac{3}{8}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

よって　$\overrightarrow{OQ}=\frac{3}{8}k\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}k\overrightarrow{OB}$

ゆえに　$\frac{3}{4}(1-t)\overrightarrow{OA}+\frac{4}{5}t\overrightarrow{OB}=\frac{3}{8}k\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}k\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{OB}\neq\vec{0}$ で，かつ $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ は平行でないから

$$\frac{3}{4}(1-t)=\frac{3}{8}k \quad \cdots\cdots ②,\qquad \frac{4}{5}t=\frac{1}{2}k \quad \cdots\cdots ③$$

③ から　$k=\frac{8}{5}t$

これを ② に代入すると　$\frac{3}{4}(1-t)=\frac{3}{5}t$　　よって　$t=\frac{5}{9}$

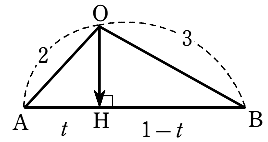
$t=\frac{5}{9}$ を ① に代入すると　$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{4}{9}\overrightarrow{OB}$

また　CQ : QD $=\frac{5}{9}:\left(1-\frac{5}{9}\right)=5:4$

12. △OABにおいて，OA $=2$，OB $=3$，$\cos\angle AOB=-\frac{1}{4}$ である。点Oから辺ABに下ろした垂線をOHとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおくとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

解答　$\overrightarrow{OH}=\frac{21}{32}\vec{a}+\frac{11}{32}\vec{b}$

解説



$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle AOB=2\cdot3\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{3}{2}$　$\cdots\cdots$ ①

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$ であるから

$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \quad \cdots\cdots ②$$

ここで，AH : HB $=t:(1-t)$ とすると，① から

$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OH}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})$$
$$=(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}-(1-t)\vec{a}\cdot\vec{a}+t\vec{b}\cdot\vec{b}-t\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$=(t-1)|\vec{a}|^2+(1-2t)\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2$$
$$=4(t-1)+(1-2t)\times\left(-\frac{3}{2}\right)+9t$$
$$=16t-\frac{11}{2}$$

ゆえに，② から　$16t-\frac{11}{2}=0$　　よって　$t=\frac{11}{32}$

ゆえに　$\overrightarrow{OH}=\frac{21}{32}\vec{a}+\frac{11}{32}\vec{b}$