数学演習（ベクトルの基本）Ｈ２４．１１．９　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

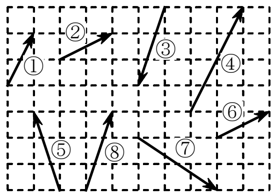
１．右の図に示されたベクトルについて，次のようなベクトルの番号の組をすべてあげよ。

(1)　大きさが等しいベクトル

(2)　向きが同じベクトル

(3)　互いに等しいベクトル

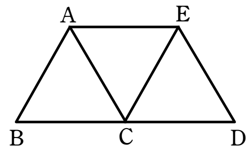
(4)　互いに逆ベクトル



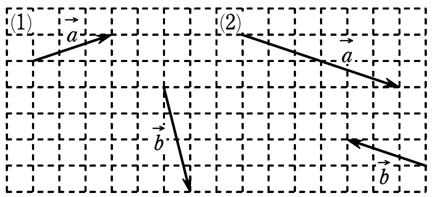
２．右の図において，△ABC，△ACE，△ECD は正三角形である。

(1)　点 A，B，C，D，E を始点，終点とする有向線分で表されるベクトルのうち，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ に等しいものを求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{ED}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。



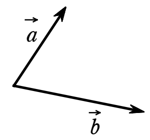
３．次の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{a}-\vec{b}$ をそれぞれ図示せよ。



４．右の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，次のベクトルを図示せよ。

(1)　$3\vec{a}$　　(2)　$\frac{1}{2}\vec{b}$　　(3)　$-2\vec{b}$

(4)　$\vec{a}+2\vec{b}$　　(5)　$-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$



５．次の計算をせよ。

(1)　$\vec{a}-3\vec{a}+4\vec{a}$　　(2)　$\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{a}-4\vec{b}$

(3)　$(2\vec{a}-3\vec{b})-(3\vec{a}+5\vec{b})$　　(4)　$2(\vec{a}-3\vec{b})+3(-\vec{a}+2\vec{b})$

(5)　$\frac{1}{2}(3\vec{a}-\vec{b})+\frac{3}{2}(2\vec{a}+\vec{b})$　　(6)　$\frac{1}{3}(-\vec{a}+4\vec{b})-\frac{1}{4}(5\vec{a}+2\vec{b})$

６．正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{CF}}$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{EC}}$　　(3)　$\overrightarrow{\mathrm{FD}}$　　(4)　$\overrightarrow{\mathrm{DB}}$　　(5)　$\overrightarrow{\mathrm{DA}}$

７．次の等式を満たす $\vec{x}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1)　$4\vec{x}-3\vec{a}=\vec{x}+6\vec{b}$　　(2)　$2(\vec{a}-\vec{x})=-3(\vec{x}-3\vec{b})$

８．等式 $\begin{cases} \vec{x}-\vec{y}=\vec{a}+\vec{b} \\ 2\vec{x}+3\vec{y}=\vec{a}-\vec{b} \end{cases}$ を満たす $\vec{x}$，$\vec{y}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

9. $\vec{a}=(3,\ 4)$，$\vec{b}=(-2,\ 3)$ のとき，次のベクトルを求めよ。

(1) $\vec{a}+\vec{b}$　(2) $\vec{a}-\vec{b}$　(3) $-3\vec{a}$

(4) $-2\vec{a}+4\vec{b}$　(5) $-3(-\vec{a}+2\vec{b})$

10. $\vec{a}=(-2,\ 3)$，$\vec{b}=(1,\ -2)$ とする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $\vec{c}=(1,\ -4)$　(2) $\vec{d}=(0,\ -1)$

11. 3 点 A$(1,\ 2)$，B$(3,\ 5)$，C$(5,\ -1)$ について，次のベクトルを成分表示せよ。また，その大きさを求めよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$　(3) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$　(4) $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$

12. 3 点 A$(1,\ 2)$，B$(4,\ 6)$，D$(3,\ 3)$ がある。四角形 ABCD が平行四辺形となるとき，点 C の座標を求めよ。

13. 3 点 $(5,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(2,\ 5)$ を頂点とする平行四辺形の，第 4 の頂点の座標を求めよ。

14. $\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(3,\ 4)$ に対して，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ (t は実数) とする。$|\vec{c}|=\sqrt{10}$ を満たす t の値を求めよ。

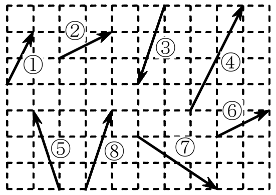
15. $\vec{a}=(9,\ 3)$，$\vec{b}=(-1,\ -2)$ とし，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ (t は実数) とする。

(1) $|\vec{c}|^2$ を t の式で表せ。　(2) $|\vec{c}|$ の最小値を求めよ。

数学演習（ベクトルの基本）Ｈ２４．７．１９　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　）

1． 右の図に示されたベクトルについて，次のようなベクトルの番号の組をすべてあげよ。

(1)　大きさが等しいベクトル
(2)　向きが同じベクトル
(3)　互いに等しいベクトル
(4)　互いに逆ベクトル



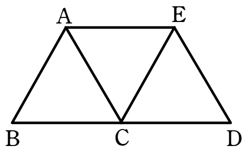
解答　(1)　①と②と⑥，③と⑤と⑧　(2)　①と④，②と⑥　(3)　②と⑥　(4)　③と⑧

解説

(1)　線分の長さが等しいものであるから
　　①と②と⑥，③と⑤と⑧
(2)　矢印の向きが同じものであるから
　　①と④，②と⑥
(3)　線分の長さが等しく，矢印の向きが同じものであるから
　　②と⑥
(4)　線分の長さが等しく，矢印の向きが逆のものであるから
　　③と⑧

2． 右の図において，△ABC，△ACE，△ECD は正三角形である。

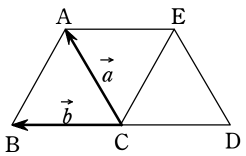
(1)　点 A，B，C，D，E を始点，終点とする有向線分で表されるベクトルのうち，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ に等しいものを求めよ。
(2)　$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{ED}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。



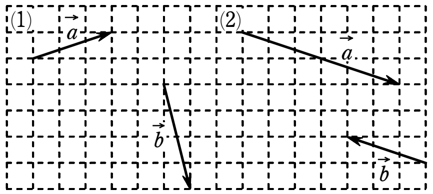
解答　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{DC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{EA}}$　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{ED}}=-\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\vec{a}-\vec{b}$

解説

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{DC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{EA}}$
(2)　$\overrightarrow{\mathrm{ED}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-\overrightarrow{\mathrm{CA}}=-\vec{a}$
　　$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\vec{a}-\vec{b}$

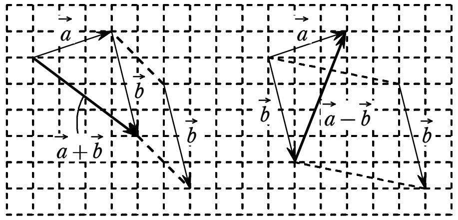


3． 次の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{a}-\vec{b}$ をそれぞれ図示せよ。

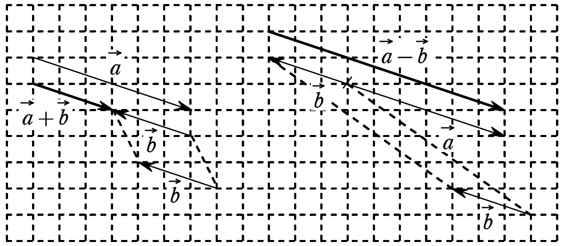


解説

(1)　$\vec{a}+\vec{b}$　　$\vec{a}-\vec{b}$

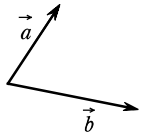


(2)　$\vec{a}+\vec{b}$　　$\vec{a}-\vec{b}$

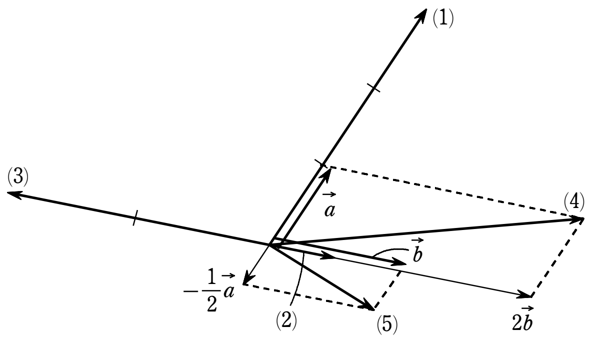


4． 右の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，次のベクトルを図示せよ。

(1)　$3\vec{a}$　(2)　$\dfrac{1}{2}\vec{b}$　(3)　$-2\vec{b}$
(4)　$\vec{a}+2\vec{b}$　(5)　$-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$



解説



5． 次の計算をせよ。

(1)　$\vec{a}-3\vec{a}+4\vec{a}$　(2)　$\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{a}-4\vec{b}$
(3)　$(2\vec{a}-3\vec{b})-(3\vec{a}+5\vec{b})$　(4)　$2(\vec{a}-3\vec{b})+3(-\vec{a}+2\vec{b})$
(5)　$\dfrac{1}{2}(3\vec{a}-\vec{b})+\dfrac{3}{2}(2\vec{a}+\vec{b})$　(6)　$\dfrac{1}{3}(-\vec{a}+4\vec{b})-\dfrac{1}{4}(5\vec{a}+2\vec{b})$

解答　(1)　$2\vec{a}$　(2)　$4\vec{a}-2\vec{b}$　(3)　$-\vec{a}-8\vec{b}$　(4)　$-\vec{a}$　(5)　$\dfrac{9}{2}\vec{a}+\vec{b}$
(6)　$-\dfrac{19}{12}\vec{a}+\dfrac{5}{6}\vec{b}$

解説

(1)　$\vec{a}-3\vec{a}+4\vec{a}=(1-3+4)\vec{a}=2\vec{a}$
(2)　$\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{a}-4\vec{b}=(1+3)\vec{a}+(2-4)\vec{b}=4\vec{a}-2\vec{b}$
(3)　$(2\vec{a}-3\vec{b})-(3\vec{a}+5\vec{b})=2\vec{a}-3\vec{b}-3\vec{a}-5\vec{b}=(2-3)\vec{a}+(-3-5)\vec{b}=-\vec{a}-8\vec{b}$
(4)　$2(\vec{a}-3\vec{b})+3(-\vec{a}+2\vec{b})=2\vec{a}-6\vec{b}-3\vec{a}+6\vec{b}=(2-3)\vec{a}+(-6+6)\vec{b}=-\vec{a}$
(5)　$\dfrac{1}{2}(3\vec{a}-\vec{b})+\dfrac{3}{2}(2\vec{a}+\vec{b})=\dfrac{3}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}+3\vec{a}+\dfrac{3}{2}\vec{b}=\left(\dfrac{3}{2}+3\right)\vec{a}+\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\right)\vec{b}$
$=\dfrac{9}{2}\vec{a}+\vec{b}$
(6)　$\dfrac{1}{3}(-\vec{a}+4\vec{b})-\dfrac{1}{4}(5\vec{a}+2\vec{b})=-\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{4}{3}\vec{b}-\dfrac{5}{4}\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}=\left(-\dfrac{1}{3}-\dfrac{5}{4}\right)\vec{a}+\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{2}\right)\vec{b}$
$=-\dfrac{19}{12}\vec{a}+\dfrac{5}{6}\vec{b}$

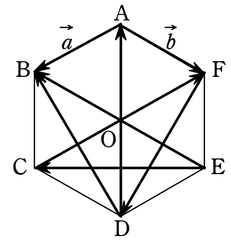
注意　(5) は $\dfrac{9\vec{a}+2\vec{b}}{2}$，(6) は $\dfrac{-19\vec{a}+10\vec{b}}{12}$ と答えてもよい。

6． 正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{CF}}$　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{EC}}$　(3)　$\overrightarrow{\mathrm{FD}}$　(4)　$\overrightarrow{\mathrm{DB}}$　(5)　$\overrightarrow{\mathrm{DA}}$

解答　(1)　$-2\vec{a}$　(2)　$\vec{a}-\vec{b}$　(3)　$2\vec{a}+\vec{b}$　(4)　$-\vec{a}-2\vec{b}$　(5)　$-2\vec{a}-2\vec{b}$

解説



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{CF}}=2\overrightarrow{\mathrm{BA}}=2(-\vec{a})=-2\vec{a}$
(2)　$\overrightarrow{\mathrm{EC}}=\overrightarrow{\mathrm{ED}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\vec{a}+(-\vec{b})$
　　$=\vec{a}-\vec{b}$
(3)　$\overrightarrow{\mathrm{FD}}=\overrightarrow{\mathrm{FC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}=2\vec{a}+\vec{b}$
(4)　$\overrightarrow{\mathrm{DB}}=\overrightarrow{\mathrm{DE}}+\overrightarrow{\mathrm{EB}}=-\vec{a}+(-2\vec{b})$
　　$=-\vec{a}-2\vec{b}$
(5)　$\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\overrightarrow{\mathrm{DB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(-\vec{a}-2\vec{b})+(-\vec{a})$
　　$=-2\vec{a}-2\vec{b}$

別解　線分 AD と線分 BE の交点を O とすると
　　$\overrightarrow{\mathrm{DO}}=\overrightarrow{\mathrm{DE}}+\overrightarrow{\mathrm{EO}}=-\vec{a}+(-\vec{b})=-\vec{a}-\vec{b}$
よって　$\overrightarrow{\mathrm{DA}}=2\overrightarrow{\mathrm{DO}}=2(-\vec{a}-\vec{b})=-2\vec{a}-2\vec{b}$

7． 次の等式を満たす $\vec{x}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1)　$4\vec{x}-3\vec{a}=\vec{x}+6\vec{b}$　(2)　$2(\vec{a}-\vec{x})=-3(\vec{x}-3\vec{b})$

解答　(1)　$\vec{x}=\vec{a}+2\vec{b}$　(2)　$\vec{x}=-2\vec{a}+9\vec{b}$

解説

(1)　等式から　$4\vec{x}-\vec{x}=6\vec{b}+3\vec{a}$
よって　$3\vec{x}=3\vec{a}+6\vec{b}$　両辺を 3 で割って　$\vec{x}=\vec{a}+2\vec{b}$
(2)　等式から　$2\vec{a}-2\vec{x}=-3\vec{x}+9\vec{b}$
よって　$-2\vec{x}+3\vec{x}=9\vec{b}-2\vec{a}$　したがって　$\vec{x}=-2\vec{a}+9\vec{b}$

8． 等式 $\begin{cases}\vec{x}-\vec{y}=\vec{a}+\vec{b}\\ 2\vec{x}+3\vec{y}=\vec{a}-\vec{b}\end{cases}$ を満たす $\vec{x}$，$\vec{y}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

解答　$\vec{x}=\dfrac{4}{5}\vec{a}+\dfrac{2}{5}\vec{b}$，$\vec{y}=-\dfrac{1}{5}\vec{a}-\dfrac{3}{5}\vec{b}$

解説

$\begin{cases} \vec{x}-\vec{y}=\vec{a}+\vec{b} & \cdots\cdots ① \\ 2\vec{x}+3\vec{y}=\vec{a}-\vec{b} & \cdots\cdots ② \end{cases}$ とおく。

①×3+② から　$5\vec{x}=4\vec{a}+2\vec{b}$

よって　$\vec{x}=\frac{4}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$

②−①×2 から　$5\vec{y}=-\vec{a}-3\vec{b}$

よって　$\vec{y}=-\frac{1}{5}\vec{a}-\frac{3}{5}\vec{b}$

9 . $\vec{a}=(3,\ 4)$，$\vec{b}=(-2,\ 3)$ のとき，次のベクトルを求めよ。

(1)　$\vec{a}+\vec{b}$　　(2)　$\vec{a}-\vec{b}$　　(3)　$-3\vec{a}$

(4)　$-2\vec{a}+4\vec{b}$　　(5)　$-3(-\vec{a}+2\vec{b})$

解答　(1)　(1，7)　(2)　(5，1)　(3)　(−9，−12)　(4)　(−14，4)　(5)　(21，−6)

解説

(1)　$\vec{a}+\vec{b}=(3,\ 4)+(-2,\ 3)=(3-2,\ 4+3)=(1,\ 7)$

(2)　$\vec{a}-\vec{b}=(3,\ 4)-(-2,\ 3)=(3-(-2),\ 4-3)=(5,\ 1)$

(3)　$-3\vec{a}=-3(3,\ 4)=(-3\times3,\ -3\times4)=(-9,\ -12)$

(4)　$-2\vec{a}+4\vec{b}=-2(3,\ 4)+4(-2,\ 3)=(-6,\ -8)+(-8,\ 12)$

$=(-6-8,\ -8+12)=(-14,\ 4)$

(5)　$-3(-\vec{a}+2\vec{b})=3\vec{a}-6\vec{b}=3(3,\ 4)-6(-2,\ 3)$

$=(9,\ 12)+(12,\ -18)$

$=(9+12,\ 12-18)=(21,\ -6)$

10. $\vec{a}=(-2,\ 3)$，$\vec{b}=(1,\ -2)$ とする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1)　$\vec{c}=(1,\ -4)$　　(2)　$\vec{d}=(0,\ -1)$

解答　(1)　$\vec{c}=2\vec{a}+5\vec{b}$　　(2)　$\vec{d}=\vec{a}+2\vec{b}$

解説

$s\vec{a}+t\vec{b}=s(-2,\ 3)+t(1,\ -2)=(-2s+t,\ 3s-2t)$

(1)　$\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とすると　$(1,\ -4)=(-2s+t,\ 3s-2t)$

よって　$-2s+t=1$，$3s-2t=-4$

これを解いて　$s=2$，$t=5$　　したがって　$\vec{c}=2\vec{a}+5\vec{b}$

(2)　$\vec{d}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とすると　$(0,\ -1)=(-2s+t,\ 3s-2t)$

よって　$-2s+t=0$，$3s-2t=-1$

これを解いて　$s=1$，$t=2$　　したがって　$\vec{d}=\vec{a}+2\vec{b}$

11. 3 点 A (1，2)，B (3，5)，C (5，−1) について，次のベクトルを成分表示せよ。また，その大きさを求めよ。

(1)　$\overrightarrow{AB}$　　(2)　$\overrightarrow{BA}$　　(3)　$\overrightarrow{BC}$　　(4)　$\overrightarrow{CA}$

解答　順に　(1)　(2，3)，$\sqrt{13}$　　(2)　(−2，−3)，$\sqrt{13}$　　(3)　(2，−6)，$2\sqrt{10}$

(4)　(−4，3)，5

解説

(1)　$\overrightarrow{AB}=(3-1,\ 5-2)=(2,\ 3)$

また　$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

(2)　$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}=(-2,\ -3)$

また　$|\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{13}$

(3)　$\overrightarrow{BC}=(5-3,\ -1-5)=(2,\ -6)$

また　$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{2^2+(-6)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

(4)　$\overrightarrow{CA}=(1-5,\ 2-(-1))=(-4,\ 3)$

また　$|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=\sqrt{25}=5$

12. 3 点 A (1，2)，B (4，6)，D (3，3) がある。四角形 ABCD が平行四辺形となるとき，点 C の座標を求めよ。

解答　(6，7)

解説

点 C の座標を $(x,\ y)$ とすると

$\overrightarrow{AD}=(3-1,\ 3-2)=(2,\ 1)$

$\overrightarrow{BC}=(x-4,\ y-6)$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ であるから　$(2,\ 1)=(x-4,\ y-6)$

よって　$x-4=2$，$y-6=1$

ゆえに　$x=6$，$y=7$

したがって，点 C の座標は　(6，7)

13. 3 点 (5，1)，(1，2)，(2，5) を頂点とする平行四辺形の，第 4 の頂点の座標を求めよ。

解答　(6，4) または (−2，6) または (4，−2)

解説

A (5，1)，B (1，2)，C (2，5) とし，求める頂点 D の座標を $(x,\ y)$ とすると，次の 3 つの場合がある。

[1]　平行四辺形 ABCD
[2]　平行四辺形 ABDC
[3]　平行四辺形 ADBC

[1] のとき　$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

よって　$(x-5,\ y-1)=(2-1,\ 5-2)$

ゆえに　$x-5=1$，$y-1=3$

したがって　$x=6$，$y=4$

[2] のとき　$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$

よって　$(2-5,\ 5-1)=(x-1,\ y-2)$

ゆえに　$-3=x-1$，$4=y-2$

したがって　$x=-2$，$y=6$

[3] のとき　$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$

よって　$(-3,\ 4)=(1-x,\ 2-y)$

ゆえに　$-3=1-x$，$4=2-y$

したがって　$x=4$，$y=-2$

以上から　(6，4) または (−2，6) または (4，−2)

14. $\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(3,\ 4)$ に対して，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ (t は実数) とする。$|\vec{c}|=\sqrt{10}$ を満たす t の値を求めよ。

解答　$t=-1,\ \frac{1}{5}$

解説

$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}=(2,\ 1)+t(3,\ 4)=(2+3t,\ 1+4t)$

$|\vec{c}|=\sqrt{10}$ であるから　$|\vec{c}|^2=(\sqrt{10})^2$　　よって　$(2+3t)^2+(1+4t)^2=10$

整理すると　$5t^2+4t-1=0$　　ゆえに　$(t+1)(5t-1)=0$

したがって　$t=-1,\ \frac{1}{5}$

15. $\vec{a}=(9,\ 3)$，$\vec{b}=(-1,\ -2)$ とし，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ (t は実数) とする。

(1)　$|\vec{c}|^2$ を t の式で表せ。　　(2)　$|\vec{c}|$ の最小値を求めよ。

解答　(1)　$|\vec{c}|^2=5t^2-30t+90$　　(2)　$t=3$ で最小値 $3\sqrt{5}$

解説

(1)　$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}=(9,\ 3)+t(-1,\ -2)=(9-t,\ 3-2t)$

よって　$|\vec{c}|^2=(9-t)^2+(3-2t)^2$

すなわち　$|\vec{c}|^2=5t^2-30t+90$

(2)　$5t^2-30t+90=5(t^2-6t)+90=5(t-3)^2+45$

よって，$|\vec{c}|^2$ は $t=3$ で最小値 45 をとる。

$|\vec{c}|\geqq0$ であるから，$|\vec{c}|^2$ が最小のとき $|\vec{c}|$ も最小になる。

したがって，$|\vec{c}|$ は $t=3$ で最小値 $\sqrt{45}=3\sqrt{5}$ をとる。