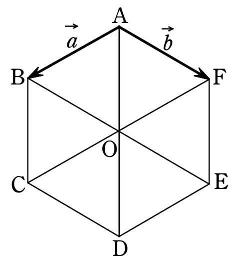
第４回定期考査（平面ベクトル）Ｈ２６．１２．１１　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

１．正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{BC}$　(2) $\overrightarrow{EC}$　(3) $\overrightarrow{CA}$　(4) $\overrightarrow{DB}$



２．$\vec{a}=(-2,\ 3)$，$\vec{b}=(1,\ -2)$ とする。ベクトル $\vec{c}=(1,\ -4)$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

３．3 点 A (1，2)，B (4，6)，D (3，3) がある。四角形 ABCD が平行四辺形となるとき，点 C の座標を求めよ。

４．$\vec{a}=(x,\ -1)$，$\vec{b}=(2,\ -3)$ に対して，$\vec{b}-\vec{a}$，$\vec{a}+3\vec{b}$ が平行になるように，x の値を定めよ。

５．$\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(3,\ 4)$ に対して，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ (t は実数) とする。

(1) $|\vec{c}|=\sqrt{10}$ を満たす t の値を求めよ。

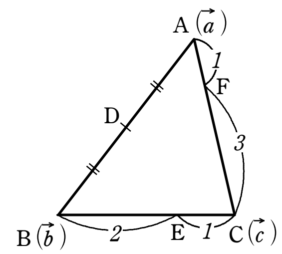
(2) $|\vec{c}|$ の最小値とそのときの t の値を求めよ。

６．$\vec{a}=(-1,\ 3)$，$\vec{b}=(2,\ -1)$ において，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

７．$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 30° であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$|3\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めよ。

８．3 点 A $(\vec{a})$，B $(\vec{b})$，C $(\vec{c})$ を頂点とする △ABC において，辺 AB の中点を D，辺 BC，CA をそれぞれ 2 : 1，3 : 1 に内分する点を E，F とする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{AC}$　(2) $\overrightarrow{BE}$　(3) $\overrightarrow{FA}$　(4) $\overrightarrow{CD}$



9．平行四辺形 ABCD において，辺 CD を 3 : 1 に内分する点を E，対角線 BD を 4 : 1 に内分する点を F とする。このとき，3 点 A，F，E は一直線上にあることを証明せよ。また，AF : FE を求めよ。

10. △ABC において，辺 AB を 3 : 1 に内分する点を D，辺 AC を 2 : 3 に内分する点を E とし，線分 BE と線分 CD の交点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

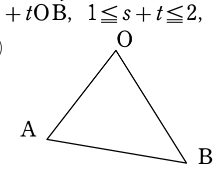
11. △OAB において，点 O から辺 AB へ垂線 OH を下ろす。OA＝3，OB＝2，∠AOB＝60° であるとき，AH : HB を求めよ。

12. △OAB において，次の条件を満たす点 P の存在する範囲を下図に図示せよ。

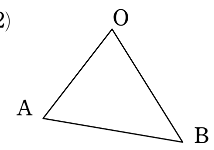
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$s+2t=3$，$s \geqq 0$，$t \geqq 0$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$1 \leqq s+t \leqq 2$，$s \geqq 0$，$t \geqq 0$

(1)



(2)



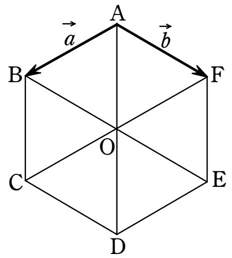
13. △ABC と 点 P について，等式 $2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+4\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ が成り立っている。直線 AP と辺 BC の交点を D とするとき，次のものを求めよ。

(1)　BD : DC　　(2)　AP : PD

(3)　△PBC : △PCA : △PAB

1．正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{BC}$　(2) $\overrightarrow{EC}$　(3) $\overrightarrow{CA}$　(4) $\overrightarrow{DB}$



解答　(1) $\vec{a}+\vec{b}$　(2) $\vec{a}-\vec{b}$　(3) $-2\vec{a}-\vec{b}$　(4) $-\vec{a}-2\vec{b}$

解説

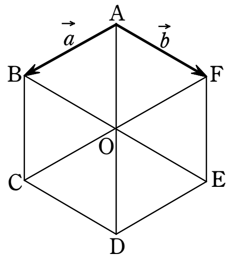
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{ED}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{CD}=\vec{b}$

(1) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=\vec{b}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{b}$

(2) $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}=\vec{a}+(-\vec{b})=\vec{a}-\vec{b}$

(3) $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FA}=-2\vec{a}+(-\vec{b})=-2\vec{a}-\vec{b}$

(4) $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EB}=-\vec{a}+(-2\vec{b})=-\vec{a}-2\vec{b}$



2．$\vec{a}=(-2,\ 3)$，$\vec{b}=(1,\ -2)$ とする。ベクトル $\vec{c}=(1,\ -4)$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

解答　$\vec{c}=2\vec{a}+5\vec{b}$

解説

$s\vec{a}+t\vec{b}=s(-2,\ 3)+t(1,\ -2)=(-2s+t,\ 3s-2t)$

$\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とすると　$(1,\ -4)=(-2s+t,\ 3s-2t)$

よって　$-2s+t=1$，$3s-2t=-4$

これを解いて　$s=2$，$t=5$　したがって　$\vec{c}=2\vec{a}+5\vec{b}$

3．3 点 A(1, 2)，B(4, 6)，D(3, 3) がある。四角形 ABCD が平行四辺形となるとき，点 C の座標を求めよ。

解答　(6, 7)

解説

点 C の座標を $(x,\ y)$ とすると

$\overrightarrow{AD}=(3-1,\ 3-2)=(2,\ 1)$

$\overrightarrow{BC}=(x-4,\ y-6)$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ であるから　$(2,\ 1)=(x-4,\ y-6)$

よって　$x-4=2$，$y-6=1$

ゆえに　$x=6$，$y=7$

したがって，点 C の座標は　(6, 7)

4．$\vec{a}=(x,\ -1)$，$\vec{b}=(2,\ -3)$ に対して，$\vec{b}-\vec{a}$，$\vec{a}+3\vec{b}$ が平行になるように，x の値を定めよ。

解答　$x=\dfrac{2}{3}$

解説

$\vec{b}-\vec{a}=(2,\ -3)-(x,\ -1)=(2-x,\ -2)$

$\vec{a}+3\vec{b}=(x,\ -1)+3(2,\ -3)=(x,\ -1)+(6,\ -9)=(x+6,\ -10)$

$\vec{b}-\vec{a}$，$\vec{a}+3\vec{b}$ が平行になるための条件は，$\vec{a}+3\vec{b}=k(\vec{b}-\vec{a})$ となる実数 k があることである。

よって　$(x+6,\ -10)=k(2-x,\ -2)$

ゆえに　$x+6=k(2-x)$ ……①，$-10=-2k$ ……②

② から　$k=5$　$k=5$ を ① に代入して　$x+6=5(2-x)$

したがって　$x=\dfrac{2}{3}$

5．$\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(3,\ 4)$ に対して，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ (t は実数) とする。

(1) $|\vec{c}|=\sqrt{10}$ を満たす t の値を求めよ。

(2) $|\vec{c}|$ の最小値とそのときの t の値を求めよ。

解答　(1) $t=-1,\ \dfrac{1}{5}$　(2) $t=-\dfrac{2}{5}$ のとき最小値 1

解説

$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}=(2,\ 1)+t(3,\ 4)=(2+3t,\ 1+4t)$

(1) $|\vec{c}|=\sqrt{10}$ であるから　$|\vec{c}|^2=(\sqrt{10})^2$　よって　$(2+3t)^2+(1+4t)^2=10$

整理すると　$5t^2+4t-1=0$　ゆえに　$(t+1)(5t-1)=0$

したがって　$t=-1,\ \dfrac{1}{5}$

(2) $|\vec{c}|^2=(2+3t)^2+(1+4t)^2=25t^2+20t+5$

$=25\left\{t^2+\dfrac{4}{5}t+\left(\dfrac{2}{5}\right)^2\right\}-25\cdot\left(\dfrac{2}{5}\right)^2+5=25\left(t+\dfrac{2}{5}\right)^2+1$

よって，$|\vec{c}|^2$ は $t=-\dfrac{2}{5}$ のとき最小値 1 をとる。

$|\vec{c}|\geqq 0$ であるから，このとき $|\vec{c}|$ も最小となる。

したがって　$t=-\dfrac{2}{5}$ のとき最小値 1

6．$\vec{a}=(-1,\ 3)$，$\vec{b}=(2,\ -1)$ において，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

解答　$\theta=135°$

解説

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1\times2+3\times(-1)=-5$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-5}{\sqrt{(-1)^2+3^2}\sqrt{2^2+(-1)^2}}$

$=\dfrac{-5}{5\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=135°$

7．$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 30° であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$|3\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めよ。

解答　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$，$|3\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$

解説

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos30°=\sqrt{3}\times2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3$

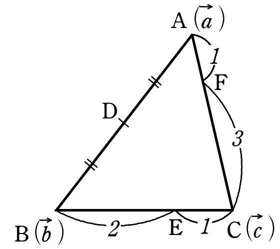
よって　$|3\vec{a}-\vec{b}|^2=(3\vec{a}-\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})=9|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=9\times(\sqrt{3})^2-6\times3+2^2=13$

$|3\vec{a}-\vec{b}|\geqq0$ であるから　$|3\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$

8．3 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ を頂点とする △ABC において，辺 AB の中点を D，辺 BC，CA をそれぞれ 2 : 1，3 : 1 に内分する点を E，F とする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{AC}$　(2) $\overrightarrow{BE}$　(3) $\overrightarrow{FA}$　(4) $\overrightarrow{CD}$



解答　(1) $\vec{c}-\vec{a}$　(2) $\dfrac{-2\vec{b}+2\vec{c}}{3}$　(3) $\dfrac{\vec{a}-\vec{c}}{4}$　(4) $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}}{2}$

解説

(1) $\overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a}$

(2) $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OB}=\dfrac{1\cdot\vec{b}+2\vec{c}}{2+1}-\vec{b}=\dfrac{-2\vec{b}+2\vec{c}}{3}$

別解　$\overrightarrow{BE}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\dfrac{2}{3}(\vec{c}-\vec{b})=\dfrac{-2\vec{b}+2\vec{c}}{3}$

(3) $\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OF}=\vec{a}-\dfrac{1\cdot\vec{c}+3\vec{a}}{3+1}=\dfrac{\vec{a}-\vec{c}}{4}$

別解　$\overrightarrow{FA}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{CA}=\dfrac{\vec{a}-\vec{c}}{4}$

(4) $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}-\vec{c}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}}{2}$

9．平行四辺形 ABCD において，辺 CD を 3 : 1 に内分する点を E，対角線 BD を 4 : 1 に内分する点を F とする。このとき，3 点 A，F，E は一直線上にあることを証明せよ。また，AF : FE を求めよ。

解答　略，　AF : FE = 4 : 1

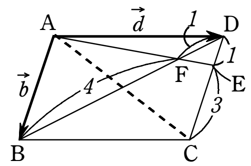
解説

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とすると　$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{b}+\vec{d}$

よって　$\overrightarrow{AE}=\dfrac{1\cdot\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AD}}{3+1}=\dfrac{(\vec{b}+\vec{d})+3\vec{d}}{4}=\dfrac{\vec{b}+4\vec{d}}{4}$

また　$\overrightarrow{AF}=\dfrac{1\cdot\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AD}}{4+1}=\dfrac{\vec{b}+4\vec{d}}{5}$

ゆえに　$\overrightarrow{AF}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AE}$



したがって，3 点 A，F，E は一直線上にある。

また，$\overrightarrow{AF}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AE}$　より　AF : FE = 4 : 1

10．△ABC において，辺 AB を 3 : 1 に内分する点を D，辺 AC を 2 : 3 に内分する点を E とし，線分 BE と線分 CD の交点を P とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{AP}$ を $\vec{b}$，

$\vec{c}$ を用いて表せ。

解答　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{9}{14}\vec{b}+\dfrac{1}{7}\vec{c}$

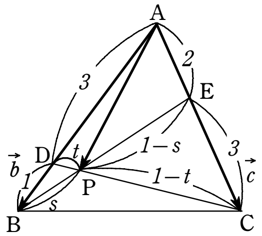
解説

BP : PE $=s:(1-s)$ とすると

$\overrightarrow{AP}=(1-s)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AE}=(1-s)\vec{b}+\dfrac{2}{5}s\vec{c}$ …… ①

DP : PC $=t:(1-t)$ とすると

$\overrightarrow{AP}=(1-t)\overrightarrow{AD}+t\overrightarrow{AC}=\dfrac{3}{4}(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$



よって　$(1-s)\vec{b}+\dfrac{2}{5}s\vec{c}=\dfrac{3}{4}(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$

$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{c}\neq\vec{0}$ で，かつ $\vec{b}$，$\vec{c}$ は平行でないから

$1-s=\dfrac{3}{4}(1-t)$，$\dfrac{2}{5}s=t$

これを解いて　$s=\dfrac{5}{14}$，$t=\dfrac{1}{7}$

$s=\dfrac{5}{14}$ を ① に代入して　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{9}{14}\vec{b}+\dfrac{1}{7}\vec{c}$

11. △OAB において，点 O から辺 AB へ垂線 OH を下ろす。OA$=3$，OB$=2$，$\angle$AOB$=60^\circ$ であるとき，AH : HB を求めよ。

解答　6 : 1

解説

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。AH : HB $=s:(1-s)$ とすると

$\overrightarrow{OH}=(1-s)\vec{a}+s\vec{b}$

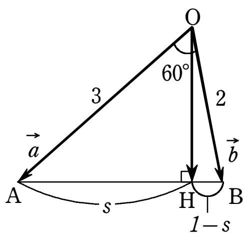
OH⊥AB であるから　$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

よって　$\{(1-s)\vec{a}+s\vec{b}\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

ゆえに　$(s-1)|\vec{a}|^2+s|\vec{b}|^2+(1-2s)\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

ここで　$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times2\times\cos60^\circ=3$



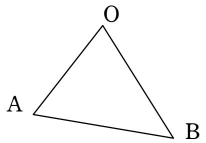
よって　$(s-1)\times3^2+s\times2^2+(1-2s)\times3=0$

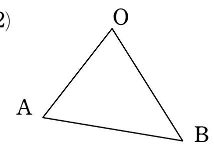
これを解いて　$s=\dfrac{6}{7}$　　したがって　AH : HB $=\dfrac{6}{7}:\left(1-\dfrac{6}{7}\right)=6:1$

12. △OAB において，次の条件を満たす点 P の存在する範囲を下図に図示せよ。

(1)　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，$s+2t=3$，$s\geqq0$，$t\geqq0$

(2)　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，$1\leqq s+t\leqq2$，$s\geqq0$，$t\geqq0$

(1)


(2)


解答　(1)　$3\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$，$\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$ とおくと，線分 CD

(2)　$\overrightarrow{OA'}=2\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'}=2\overrightarrow{OB}$ とすると，四角形 AA′B′B の周および内部

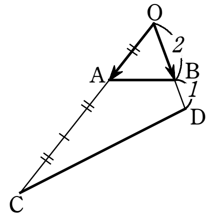
解説

(1)　$s+2t=3$ から　$\dfrac{1}{3}s+\dfrac{2}{3}t=1$，$s\geqq0$，$t\geqq0$

よって　$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{3}s\cdot3\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{3}t\cdot\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OB}$

ゆえに，$3\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$，$\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$ とおくと，

点 P の存在範囲は　線分 CD

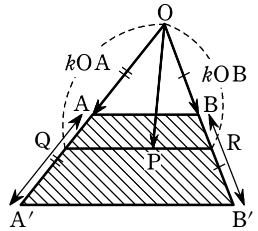


(2)　$s+t=k$ $(1\leqq k\leqq2)$ とおくと　$\dfrac{s}{k}+\dfrac{t}{k}=1$

$\dfrac{s}{k}=s'$，$\dfrac{t}{k}=t'$ とおくと　$s'+t'=1$，$s'\geqq0$，$t'\geqq0$，$\overrightarrow{OP}=s'(k\overrightarrow{OA})+t'(k\overrightarrow{OB})$

よって，k が一定のとき $\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OR}=k\overrightarrow{OB}$ である点を Q，R とすると，点 P は AB に平行な線分 QR 上を動く。

ここで，半直線 OA，OB 上にそれぞれ点 A′，B′ を $\overrightarrow{OA'}=2\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'}=2\overrightarrow{OB}$ となるようにとると，$1\leqq k\leqq2$ の範囲で k が変わるとき，点 P の存在する範囲は四角形 AA′B′B の周および内部である。



13. △ABC と 点 P について，等式 $2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ が成り立っている。直線 AP と辺 BC の交点を D とするとき，次のものを求めよ。

(1)　BD : DC　　(2)　AP : PD

(3)　△PBC : △PCA : △PAB

解答　(1)　4 : 3　　(2)　7 : 2　　(3)　2 : 3 : 4

解説

(1)　$2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ から

$-2\overrightarrow{AP}+3(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+4(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\vec{0}$

よって　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{9}=\dfrac{7}{9}\cdot\dfrac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{7}=\dfrac{7}{9}\cdot\dfrac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{4+3}$

ゆえに，辺 BC を 4 : 3 に内分する点を Q とすると　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{7}{9}\overrightarrow{AQ}$

よって，3 点 A，P，Q は一直線上にあり　AP : PQ $=7:2$

すなわち，この点 Q が点 D であり　BD : DC $=4:3$

(2)　(1) から　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{7}{9}\overrightarrow{AD}$　　よって　AP : PD $=7:2$

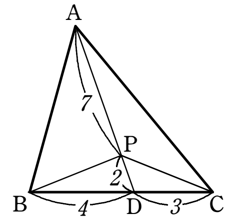
(3)　△PBD : △PCD $=$ BD : DC $=4:3$

よって，△PBD $=4S$，△PCD $=3S$ とおくと

△PBC $=$ △PBD $+$ △PCD $=4S+3S=7S$

また　△PCA : △PCD $=$ AP : PD $=7:2$

ゆえに　△PCA $=\dfrac{7}{2}$△PCD $=\dfrac{7}{2}\times3S=\dfrac{21}{2}S$



更に　△PAB : △PBD $=$ AP : PD $=7:2$

よって　△PAB $=\dfrac{7}{2}$△PBD $=\dfrac{7}{2}\times4S=14S$

したがって　△PBC : △PCA : △PAB $=7S:\dfrac{21}{2}S:14S=2:3:4$