確認テスト（平面ベクトル）Ｈ２３．９．１７　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1．正六角形 ABCDEF において，辺 CD を 2 : 1 に内分する点を P，辺 EF の中点を Q とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，ベクトル $\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{QP}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

2．4 点 A(3，2)，B(−2，6)，C(−2，−4)，D(8，a) がある。$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CD}$ であるとき，a の値を求めよ。

3．3 点 A(1，3)，B(3，−2)，C(4，1) がある。四角形 ABCD が平行四辺形であるとき，点 D の座標を求めよ。

4．ベクトル $\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ 1)$ に対し，ベクトル $t\vec{a}+\vec{b}$ の大きさが 1 となる t の値を求めよ。

5．$\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(-4,\ 3)$ がある。実数 t を変化させるとき，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさの最小値と，そのときの t の値を求めよ。

6．次のベクトルのなす角 θ を求めよ。　$\vec{a}=(2,\ 3)$，$\vec{b}=(-1,\ 5)$

7．ベクトル $\vec{a}=(-1,\ 2)$ に垂直な単位ベクトル $\vec{p}$ と平行な単位ベクトル $\vec{q}$ を求めよ。

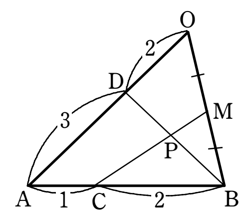
8．$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|\vec{a}-\vec{b}|=1$ であるとき，$2\vec{a}-3\vec{b}$ の大きさを求めよ。

9．$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$ で，$\vec{a}-\vec{b}$ と $2\vec{a}+5\vec{b}$ が垂直であるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

10. $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-4\vec{b}|=7$ のとき，$\vec{a}+t\vec{b}$，$\vec{a}+\vec{b}$ が垂直になるように，t の値を定めよ。

11. 平行四辺形 ABCD において，辺 CD を 3 : 1 に内分する点を E，対角線 BD を 4 : 1 に内分する点を F とする。このとき，3 点 A，F，E は一直線上にあることを証明せよ。

12. △OAB において，辺 OB の中点を M，辺 AB を 1 : 2 に内分する点を C，辺 OA を2 : 3 に内分する点を D とし，線分 CM と線分 BD の交点を P とする。
$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。
また，BP : PD と CP : PM を求めよ。



確認テスト（平面ベクトル）Ｈ２３．９．１７　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1．正六角形 ABCDEF において，辺 CD を 2 : 1 に内分する点を P，辺 EF の中点を Q とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，ベクトル $\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{QP}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

解答　$\overrightarrow{EF}=-\vec{a}-\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=2\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{QP}=\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}$

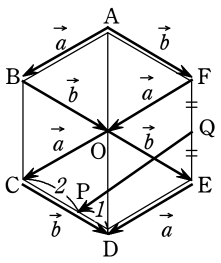
解説
この正六角形の中心を O とする。

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OF}=-\vec{b}-\vec{a}=-\vec{a}-\vec{b}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{QE}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$

$=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})+\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}=\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}$



2．4 点 A (3，2)，B (−2，6)，C (−2，−4)，D (8，a) がある。$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CD}$ であるとき，a の値を求めよ。

解答　$a=-12$

解説
$\overrightarrow{AB}=(-2-3,\ 6-2)=(-5,\ 4)$，$\overrightarrow{CD}=(8+2,\ a+4)=(10,\ a+4)$

$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CD}$ であるから，$\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}$ となる実数 k がある。

ゆえに　$(10,\ a+4)=k(-5,\ 4)$

よって　$10=-5k$ ……①，$a+4=4k$ ……②　　① から　$k=-2$

これを ② に代入して　$a=-12$

3．3 点 A (1，3)，B (3，−2)，C (4，1) がある。四角形 ABCD が平行四辺形であるとき，点 D の座標を求めよ。

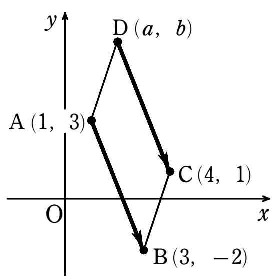
解答　D (2，6)

解説
D の座標を $(a,\ b)$ とする。四角形 ABCD は平行四辺形であるから　$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

よって　$(2,\ -5)=(4-a,\ 1-b)$

ゆえに　$2=4-a$，$-5=1-b$

これを解いて　$a=2$，$b=6$　　したがって　D (2，6)



4．ベクトル $\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ 1)$ に対し，ベクトル $t\vec{a}+\vec{b}$ の大きさが 1 となる t の値を求めよ。

解答　$t=-1,\ -\frac{1}{5}$

解説
$t\vec{a}+\vec{b}=t(1,\ 2)+(1,\ 1)=(t+1,\ 2t+1)$

$|t\vec{a}+\vec{b}|=1$ となるための条件は　$|t\vec{a}+\vec{b}|^2=1$　　よって　$(t+1)^2+(2t+1)^2=1$

すなわち　$5t^2+6t+1=0$　　ゆえに　$(t+1)(5t+1)=0$

したがって　$t=-1,\ -\frac{1}{5}$

5．$\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(-4,\ 3)$ がある。実数 t を変化させるとき，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさの最小値と，そのときの t の値を求めよ。

解答　$t=\frac{1}{5}$ のとき $|\vec{c}|$ は最小値 2

解説
$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}=(2,\ 1)+t(-4,\ 3)=(2-4t,\ 1+3t)$

よって　$|\vec{c}|^2=(2-4t)^2+(1+3t)^2=25t^2-10t+5$

$=25\left\{t^2-\frac{2}{5}t+\left(\frac{1}{5}\right)^2\right\}-25\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2+5$

$=25\left(t-\frac{1}{5}\right)^2+4$

ゆえに，$t=\frac{1}{5}$ のとき $|\vec{c}|^2$ は最小値 4 をとる。

$|\vec{c}|\geqq 0$ であるから，$t=\frac{1}{5}$ のとき $|\vec{c}|$ は最小値 2 をとる。

6．次のベクトルのなす角 θ を求めよ。　$\vec{a}=(2,\ 3)$，$\vec{b}=(-1,\ 5)$

解答　$\theta=45^\circ$

解説
$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-1)+3\times5=13$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{13}{\sqrt{2^2+3^2}\sqrt{(-1)^2+5^2}}$

$=\dfrac{13}{\sqrt{13}\sqrt{26}}=\dfrac{13}{13\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=45^\circ$

7．ベクトル $\vec{a}=(-1,\ 2)$ に垂直な単位ベクトル $\vec{p}$ と平行な単位ベクトル $\vec{q}$ を求めよ。

解答　$\vec{p}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$，$\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\ -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$，$\vec{q}=\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$，$\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

解説
$\vec{p}=(x,\ y)$ とすると，$|\vec{p}|=1$ であるから　$x^2+y^2=1$ ……①

$\vec{p}$ は $\vec{a}=(-1,\ 2)$ に垂直であるから　$\vec{p}\cdot\vec{a}=0$

よって　$(-1)\cdot x+2y=0$　　ゆえに　$x=2y$ ……②

② を ① に代入すると　$(2y)^2+y^2=1$　　よって　$y=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

② から　$x=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$（複号同順）

したがって　$\vec{p}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$，$\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\ -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

また，$|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$ であるから，$\vec{a}$ に平行な単位ベクトル $\vec{q}$ は $\vec{q}=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{a}$

となる。したがって，$\vec{q}=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,\ 2)$ より $\vec{q}=\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$，$\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

8. $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=\sqrt{3}$, $|\vec{a}-\vec{b}|=1$ であるとき，$2\vec{a}-3\vec{b}$ の大きさを求めよ。

解答　$\sqrt{7}$

解説

$|\vec{a}-\vec{b}|=1$ から　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=1$　左辺を展開して　$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1$

よって　$2^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+(\sqrt{3})^2=1$　　したがって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

また，　$|2\vec{a}-3\vec{b}|^2=(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-3\vec{b})=4|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2$

$=4\cdot4-12\cdot3+9\cdot3=7$

$|2\vec{a}-3\vec{b}|\geqq0$ であるから　$|2\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{7}$

9. $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$ で，$\vec{a}-\vec{b}$ と $2\vec{a}+5\vec{b}$ が垂直であるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

解答　$\theta=120°$

解説

$(\vec{a}-\vec{b})\perp(2\vec{a}+5\vec{b})$ から　$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}+5\vec{b})=0$

よって　$2|\vec{a}|^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}-5|\vec{b}|^2=0$

$|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$ を代入して　$2\cdot4+3\vec{a}\cdot\vec{b}-5\cdot1=0$　　ゆえに　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$

したがって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-1}{2\cdot1}=-\dfrac{1}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=120°$

10. $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{a}-4\vec{b}|=7$ のとき，$\vec{a}+t\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$ が垂直になるように，t の値を定めよ。

解答　$t=-\dfrac{12}{7}$

解説

$|\vec{a}-4\vec{b}|=7$ であるから　$|\vec{a}-4\vec{b}|^2=7^2$

よって　$|\vec{a}|^2-8\vec{a}\cdot\vec{b}+16|\vec{b}|^2=49$　　ゆえに　$3^2-8\vec{a}\cdot\vec{b}+16\times2^2=49$

したがって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

$(\vec{a}+t\vec{b})\perp(\vec{a}+\vec{b})$ となるための条件は　$(\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=0$

すなわち　$|\vec{a}|^2+(1+t)\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0$

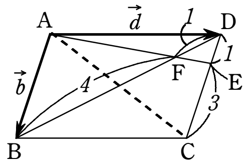
よって　$3^2+(1+t)\times3+t\times2^2=0$

したがって　$t=-\dfrac{12}{7}$

11. 平行四辺形 ABCD において，辺 CD を 3 : 1 に内分する点を E，対角線 BD を 4 : 1 に内分する点を F とする。このとき，3 点 A，F，E は一直線上にあることを証明せよ。

解答　略

解説



$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とすると　$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{b}+\vec{d}$

よって　$\overrightarrow{AE}=\dfrac{1\cdot\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AD}}{3+1}=\dfrac{(\vec{b}+\vec{d})+3\vec{d}}{4}=\dfrac{\vec{b}+4\vec{d}}{4}$

また　$\overrightarrow{AF}=\dfrac{1\cdot\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AD}}{4+1}=\dfrac{\vec{b}+4\vec{d}}{5}$

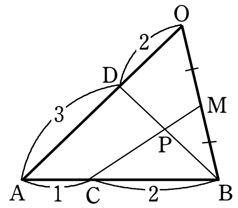
ゆえに　$\overrightarrow{AF}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AE}$

したがって，3 点 A，F，E は一直線上にある。

12. △OAB において，辺 OB の中点を M，辺 AB を 1 : 2 に内分する点を C，辺 OA を 2 : 3 に内分する点を D とし，線分 CM と線分 BD の交点を P とする。

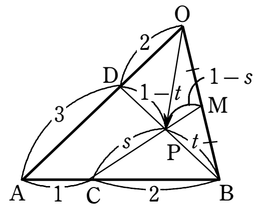
$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

また，BP : PD と CP : PM を求めよ。



解答　$\overrightarrow{OP}=\dfrac{2}{9}\vec{a}+\dfrac{4}{9}\vec{b}$, BP : PD = 5 : 4 ，CP : PM = 2 : 1

解説



CP : PM $=s:(1-s)$ とすると

$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OC}+s\overrightarrow{OM}=(1-s)\left(\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{1+2}\right)+s\left(\dfrac{1}{2}\vec{b}\right)$

$=\dfrac{2(1-s)}{3}\vec{a}+\dfrac{2(1-s)+3s}{6}\vec{b}$

$=\dfrac{2(1-s)}{3}\vec{a}+\dfrac{2+s}{6}\vec{b}$

BP : PD $=t:(1-t)$ とすると

$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OD}=(1-t)\vec{b}+t\left(\dfrac{2}{5}\vec{a}\right)$

$=\dfrac{2}{5}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

$\overrightarrow{OP}$ の $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いた表し方は 1 通りであるから

$\dfrac{2(1-s)}{3}=\dfrac{2}{5}t$,　$\dfrac{2+s}{6}=1-t$

これを解くと　$s=\dfrac{2}{3}$,　$t=\dfrac{5}{9}$

したがって　$\overrightarrow{OP}=\dfrac{2}{9}\vec{a}+\dfrac{4}{9}\vec{b}$

また，BP : PD $=t:(1-t)=\dfrac{5}{9}:\left(1-\dfrac{5}{9}\right)=5:4$

CP : PM $=s:(1-s)=\dfrac{2}{3}:\left(1-\dfrac{2}{3}\right)=2:1$