確認テスト（平面ベクトル）Ｈ２３．９．１６　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1．正六角形 ABCDEF において，辺 CD を 2 : 1 に内分する点を P，辺 EF の中点を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{b}$ とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

2．4 点 A(3，2)，B(−2，6)，C(−2，−4)，D(8，a) がある。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ であるとき，a の値を求めよ。

3．3 点 A(1，3)，B(3，−2)，C(4，1) がある。四角形 ABCD が平行四辺形であるとき，点 D の座標を求めよ。

4．ベクトル $\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ 1)$ に対し，ベクトル $t\vec{a}+\vec{b}$ の大きさが 1 となる t の値を求めよ。

5．$\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(-4,\ 3)$ がある。実数 t を変化させるとき，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさの最小値と，そのときの t の値を求めよ。

6．次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。$\vec{a}=(-1,\ 1)$，$\vec{b}=(\sqrt{3}-1,\ \sqrt{3}+1)$

7．ベクトル $\vec{a}=(-1,\ 2)$ に垂直な単位ベクトル $\vec{p}$ と平行な単位ベクトル $\vec{q}$ を求めよ。

8．$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|\vec{a}-\vec{b}|=1$ であるとき，$2\vec{a}-3\vec{b}$ の大きさを求めよ。

9 . $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$ で，$\vec{a}-\vec{b}$ と $2\vec{a}+5\vec{b}$ が垂直であるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

10. ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，$|\vec{a}-\vec{b}|=6$ とする。t を実数として，$\vec{a}+t\vec{b}$ と $\vec{b}$ が垂直になるとき，t の値を求めよ。

11. 平行四辺形 ABCD において，対角線 AC を 2 : 3 に内分する点を L，辺 AB を 2 : 3 に内分する点を M，線分 MC を 4 : 15 に内分する点を N とするとき，3 点 D，L，N は一直線上にあることを証明せよ。また，DL : LN を簡単な整数比で求めよ。

12. 三角形 OAB の 2 辺 OA，OB をそれぞれ 3 : 1，4 : 1 に内分する点を D，C とし，AC と BD の交点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおくとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。また，DP : PB とAP : PC を求めよ。

1．正六角形 ABCDEF において，辺 CD を 2 : 1 に内分する点を P，辺 EF の中点を Q とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，ベクトル $\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{QP}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

解答　$\overrightarrow{EF}=-\vec{a}-\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=2\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{QP}=\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}$

解説

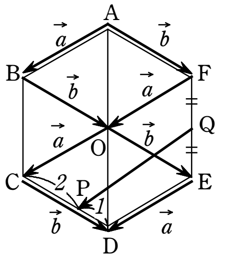
この正六角形の中心を O とする。

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OF}=-\vec{b}-\vec{a}=-\vec{a}-\vec{b}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{QE}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$

$=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})+\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}=\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}$



2．4 点 A (3，2)，B (−2，6)，C (−2，−4)，D (8，a) がある。$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CD}$ であるとき，a の値を求めよ。

解答　$a=-12$

解説

$\overrightarrow{AB}=(-2-3,\ 6-2)=(-5,\ 4)$，$\overrightarrow{CD}=(8+2,\ a+4)=(10,\ a+4)$

$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CD}$ であるから，$\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}$ となる実数 k がある。

ゆえに　$(10,\ a+4)=k(-5,\ 4)$

よって　$10=-5k$ ……①，$a+4=4k$ ……②　　① から　$k=-2$

これを ② に代入して　$a=-12$

3．3 点 A (1，3)，B (3，−2)，C (4，1) がある。四角形 ABCD が平行四辺形であるとき，点 D の座標を求めよ。

解答　D (2，6)

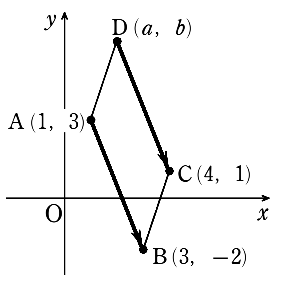
解説

D の座標を (a，b) とする。四角形 ABCD は平行四辺形であるから　$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

よって　$(2,\ -5)=(4-a,\ 1-b)$

ゆえに　$2=4-a$，$-5=1-b$

これを解いて　$a=2$，$b=6$　　したがって　D (2，6)



4．ベクトル $\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ 1)$ に対し，ベクトル $t\vec{a}+\vec{b}$ の大きさが 1 となる t の値を求めよ。

解答　$t=-1,\ -\frac{1}{5}$

解説

$t\vec{a}+\vec{b}=t(1,\ 2)+(1,\ 1)=(t+1,\ 2t+1)$

$|t\vec{a}+\vec{b}|=1$ となるための条件は　$|t\vec{a}+\vec{b}|^2=1$　　よって　$(t+1)^2+(2t+1)^2=1$

すなわち　$5t^2+6t+1=0$　　ゆえに　$(t+1)(5t+1)=0$

したがって　$t=-1,\ -\frac{1}{5}$

5．$\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(-4,\ 3)$ がある。実数 t を変化させるとき，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさの最小値と，そのときの t の値を求めよ。

解答　$t=\frac{1}{5}$ のとき $|\vec{c}|$ は最小値 2

解説

$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}=(2,\ 1)+t(-4,\ 3)=(2-4t,\ 1+3t)$

よって　$|\vec{c}|^2=(2-4t)^2+(1+3t)^2=25t^2-10t+5$

$=25\left\{t^2-\frac{2}{5}t+\left(\frac{1}{5}\right)^2\right\}-25\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2+5$

$=25\left(t-\frac{1}{5}\right)^2+4$

ゆえに，$t=\frac{1}{5}$ のとき $|\vec{c}|^2$ は最小値 4 をとる。

$|\vec{c}|\geqq 0$ であるから，$t=\frac{1}{5}$ のとき $|\vec{c}|$ は最小値 2 をとる。

6．次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。$\vec{a}=(-1,\ 1)$，$\vec{b}=(\sqrt{3}-1,\ \sqrt{3}+1)$

解答　$\theta=60^\circ$

解説

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1)(\sqrt{3}-1)+1\cdot(\sqrt{3}+1)=2$

また　$|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{2}{\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$　　$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ であるから　$\theta=60^\circ$

7．ベクトル $\vec{a}=(-1,\ 2)$ に垂直な単位ベクトル $\vec{p}$ と平行な単位ベクトル $\vec{q}$ を求めよ。

解答　$\vec{p}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right),\ \left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\ -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$，$\vec{q}=\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

解説

$\vec{p}=(x,\ y)$ とすると，$|\vec{p}|=1$ であるから　$x^2+y^2=1$　……①

$\vec{p}$ は $\vec{a}=(-1,\ 2)$ に垂直であるから　$\vec{p}\cdot\vec{a}=0$

よって　$(-1)\cdot x+2y=0$　　ゆえに　$x=2y$　……②

② を ① に代入すると　$(2y)^2+y^2=1$　　よって　$y=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

② から　$x=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$（複号同順）

したがって　$\vec{p}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right),\ \left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\ -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

また，$|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$ であるから，$\vec{a}$ に平行な単位ベクトル $\vec{q}$ は $\vec{q}=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{a}$

となる。したがって，$\vec{q}=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,\ 2)$ より $\vec{q}=\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

8．$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|\vec{a}-\vec{b}|=1$ であるとき，$2\vec{a}-3\vec{b}$ の大きさを求めよ。

解答　$\sqrt{7}$

解説

$|\vec{a}-\vec{b}|=1$ から　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=1$　左辺を展開して　$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1$

よって　$2^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+(\sqrt{3})^2=1$　　したがって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

また，　$|2\vec{a}-3\vec{b}|^2=(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-3\vec{b})=4|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2$

$=4\cdot 4-12\cdot 3+9\cdot 3=7$

$|2\vec{a}-3\vec{b}|\geqq 0$　であるから　$|2\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{7}$

9．$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$ で，$\vec{a}-\vec{b}$ と $2\vec{a}+5\vec{b}$ が垂直であるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

解答　$\theta=120°$

解説

$(\vec{a}-\vec{b})\perp(2\vec{a}+5\vec{b})$ から　$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}+5\vec{b})=0$

よって　$2|\vec{a}|^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}-5|\vec{b}|^2=0$

$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$ を代入して　$2\cdot4+3\vec{a}\cdot\vec{b}-5\cdot1=0$　　ゆえに　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$

したがって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-1}{2\cdot1}=-\dfrac{1}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=120°$

10．ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，$|\vec{a}-\vec{b}|=6$ とする。t を実数として，$\vec{a}+t\vec{b}$ と $\vec{b}$ が垂直になるとき，t の値を求めよ。

解答　$t=\dfrac{11}{32}$

解説

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=3^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+4^2=25-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=6^2$ であるから　$25-2\vec{a}\cdot\vec{b}=36$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{11}{2}$　……①

$(\vec{a}+t\vec{b})\perp\vec{b}$ から　$(\vec{a}+t\vec{b})\cdot\vec{b}=0$

すなわち　$\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0$

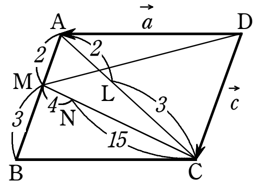
① から　$-\dfrac{11}{2}+t\times4^2=0$

ゆえに　$t=\dfrac{11}{32}$

11．平行四辺形 ABCD において，対角線 AC を $2:3$ に内分する点を L，辺 AB を $2:3$ に内分する点を M，線分 MC を $4:15$ に内分する点を N とするとき，3 点 D，L，N は一直線上にあることを証明せよ。また，DL：LN を簡単な整数比で求めよ。

解答　略，DL：LN$=19:6$

解説



$\overrightarrow{DA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{DC}=\vec{c}$ とすると　$\overrightarrow{DL}=\dfrac{3\vec{a}+2\vec{c}}{5}$　……①

$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\dfrac{2}{5}\vec{c}$ であるから

$\overrightarrow{DN}=\dfrac{15\overrightarrow{DM}+4\overrightarrow{DC}}{19}=\dfrac{15\left(\vec{a}+\dfrac{2}{5}\vec{c}\right)+4\vec{c}}{19}$

$=\dfrac{15\vec{a}+10\vec{c}}{19}=\dfrac{5}{19}(3\vec{a}+2\vec{c})$　……②

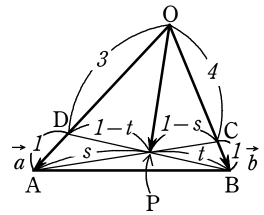
①，② から　$\overrightarrow{DN}=\dfrac{25}{19}\overrightarrow{DL}$　……③

したがって，3 点 D，L，N は一直線上にある。また③より DL：LN$=19:6$

12．三角形 OAB の 2 辺 OA，OB をそれぞれ $3:1$，$4:1$ に内分する点を D，C とし，AC と BD の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおくとき，$\overrightarrow{OP}$を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。また，DP：PB とAP：PC を求めよ。

解答　$\overrightarrow{OP}=\dfrac{3}{8}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$，DP：PB$=1:1$，AP：PC$=5:3$

解説



点 P は線分 AC，BD 上にあるから

DP：PB$=1-t:t$ とおくと

$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OD}$

$=\dfrac{3}{4}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

また，CP：PA$=1-s:s$ とおくと

$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OC}$

$=(1-s)\vec{a}+\dfrac{4}{5}s\vec{b}$

と表される。$\overrightarrow{OP}$ について係数を比較して　$1-s=\dfrac{3}{4}t$，$\dfrac{4}{5}s=1-t$

これを解いて　$s=\dfrac{5}{8}$，$t=\dfrac{1}{2}$　　ゆえに　$\overrightarrow{OP}=\dfrac{3}{8}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$

$s=\dfrac{5}{8}$，$t=\dfrac{1}{2}$　を代入して

DP：PB$=\left(1-\dfrac{1}{2}\right):\dfrac{1}{2}=1:1$　　AP：PC$=\dfrac{5}{8}:\left(1-\dfrac{5}{8}\right)=5:3$