確認テスト（平面ベクトル）Ｈ２３．９．９　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1．正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。　(1) $\overrightarrow{FD}$　(2) $\overrightarrow{DB}$　(3) $\overrightarrow{DA}$

2．$\vec{a}=(1,\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ 3)$ のとき，次のベクトルを求めよ。

(1) $\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトル　(2) $\vec{b}$ と反対向きの単位ベクトル

3．$\vec{a}=(x,\ -1)$，$\vec{b}=(2,\ -3)$ に対して，$\vec{b}-\vec{a}$，$\vec{a}+3\vec{b}$ が平行になるように，x の値を定めよ。

4．3 点 $(5,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(2,\ 5)$ を頂点とする平行四辺形の，第 4 の頂点の座標を求めよ。

5．$\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(3,\ 4)$ に対して，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ （t は実数）とする。

(1) $|\vec{c}|=\sqrt{10}$ を満たす t の値を求めよ。

(2) $|\vec{c}|$ の最小値とそのときの t の値を求めよ。

6．次のベクトルのなす角 θ を求めよ。　$\vec{a}=(2,\ 3)$，$\vec{b}=(-1,\ 5)$

7．ベクトル $\vec{a}=(-3,\ 4)$ に垂直な単位ベクトルを求めよ。

8．$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 30° であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$|3\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めよ。

9．$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=2$ で，ベクトル $\vec{a}-4\vec{b}$，$\vec{a}$ が垂直であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

10. $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-4\vec{b}|=7$ のとき，$\vec{a}+t\vec{b}$，$\vec{a}+\vec{b}$ が垂直になるように，t の値を定めよ。

11. 平行四辺形 ABCD において，辺 CD を 3 : 1 に内分する点を E，対角線 BD を 4 : 1 に内分する点を F とする。このとき，3 点 A，F，E は一直線上にあることを証明せよ。

12. △OAB の辺 OA を 3 : 1 に内分する点を C，辺 OB を 4 : 1 に内分する点を D とし，辺 BC の中点を P とする。直線 OP と CD の交点を Q とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。また，CQ : QD を求めよ。

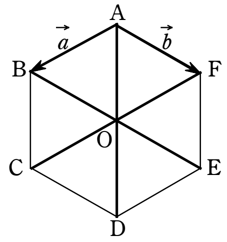
確認テスト（平面ベクトル）Ｈ２３．９．９

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1．正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。　(1) $\overrightarrow{FD}$　(2) $\overrightarrow{DB}$　(3) $\overrightarrow{DA}$

解答　(1) $2\vec{a}+\vec{b}$　(2) $-\vec{a}-2\vec{b}$　(3) $-2\vec{a}-2\vec{b}$

解説



(1) $\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CD}=2\vec{a}+\vec{b}$

(2) $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EB}=-\vec{a}+(-2\vec{b})$
$=-\vec{a}-2\vec{b}$

(3) $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BA}=(-\vec{a}-2\vec{b})+(-\vec{a})$
$=-2\vec{a}-2\vec{b}$

別解　線分 AD と線分 BE の交点を O とすると
$\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EO}=-\vec{a}+(-\vec{b})=-\vec{a}-\vec{b}$

よって　$\overrightarrow{DA}=2\overrightarrow{DO}=2(-\vec{a}-\vec{b})=-2\vec{a}-2\vec{b}$

2．$\vec{a}=(1,\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ 3)$ のとき，次のベクトルを求めよ。
(1) $\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトル　(2) $\vec{b}$ と反対向きの単位ベクトル

解答　(1) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$　(2) $\left(\frac{1}{\sqrt{10}},\ -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

解説

(1) $|\vec{a}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ であるから，求めるベクトルは
$\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 1)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(2) $|\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$ であるから，求めるベクトルは
$-\frac{1}{\sqrt{10}}\vec{b}=-\frac{1}{\sqrt{10}}(-1,\ 3)=\left(\frac{1}{\sqrt{10}},\ -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

3．$\vec{a}=(x,\ -1)$，$\vec{b}=(2,\ -3)$ に対して，$\vec{b}-\vec{a}$，$\vec{a}+3\vec{b}$ が平行になるように，x の値を定めよ。

解答　$x=\frac{2}{3}$

解説

$\vec{b}-\vec{a}=(2,\ -3)-(x,\ -1)=(2-x,\ -2)$
$\vec{a}+3\vec{b}=(x,\ -1)+3(2,\ -3)=(x,\ -1)+(6,\ -9)=(x+6,\ -10)$

$\vec{b}-\vec{a}$，$\vec{a}+3\vec{b}$ が平行になるための条件は，$\vec{a}+3\vec{b}=k(\vec{b}-\vec{a})$ となる実数 k があることである。

よって　$(x+6,\ -10)=k(2-x,\ -2)$

ゆえに　$x+6=k(2-x)$ …… ①，　$-10=-2k$ …… ②

② から　$k=5$　　$k=5$ を ① に代入して　$x+6=5(2-x)$

したがって　$x=\frac{2}{3}$

4．3 点 $(5,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(2,\ 5)$ を頂点とする平行四辺形の，第 4 の頂点の座標を求めよ。

解答　$(6,\ 4)$ または $(-2,\ 6)$ または $(4,\ -2)$

解説

A$(5,\ 1)$，B$(1,\ 2)$，C$(2,\ 5)$ とし，求める頂点 D の座標を $(x,\ y)$ とすると，次の 3 つの場合がある。

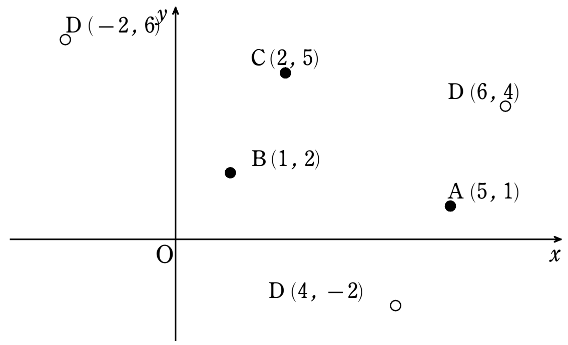
[1]　平行四辺形 ABCD
[2]　平行四辺形 ABDC
[3]　平行四辺形 ADBC

[1] のとき　$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$
よって　$(x-5,\ y-1)=(2-1,\ 5-2)$
ゆえに　$x-5=1,\ y-1=3$
したがって　$x=6,\ y=4$

[2] のとき　$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$
よって　$(2-5,\ 5-1)=(x-1,\ y-2)$
ゆえに　$-3=x-1,\ 4=y-2$
したがって　$x=-2,\ y=6$

[3] のとき　$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$
よって　$(-3,\ 4)=(1-x,\ 2-y)$
ゆえに　$-3=1-x,\ 4=2-y$
したがって　$x=4,\ y=-2$

以上から　$(6,\ 4)$ または $(-2,\ 6)$ または $(4,\ -2)$



5．$\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(3,\ 4)$ に対して，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ (t は実数) とする。
(1) $|\vec{c}|=\sqrt{10}$ を満たす t の値を求めよ。
(2) $|\vec{c}|$ の最小値とそのときの t の値を求めよ。

解答　(1) $t=-1,\ \frac{1}{5}$　(2) $t=-\frac{2}{5}$ のとき最小値 1

解説

$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}=(2,\ 1)+t(3,\ 4)=(2+3t,\ 1+4t)$

(1) $|\vec{c}|=\sqrt{10}$ であるから　$|\vec{c}|^2=(\sqrt{10})^2$　よって　$(2+3t)^2+(1+4t)^2=10$
整理すると　$5t^2+4t-1=0$　ゆえに　$(t+1)(5t-1)=0$
したがって　$t=-1,\ \frac{1}{5}$

(2) $|\vec{c}|^2=(2+3t)^2+(1+4t)^2=25t^2+20t+5$
$=25\left\{t^2+\frac{4}{5}t+\left(\frac{2}{5}\right)^2\right\}-25\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2+5=25\left(t+\frac{2}{5}\right)^2+1$

よって，$|\vec{c}|^2$ は $t=-\frac{2}{5}$ のとき最小値 1 をとる。

$|\vec{c}|\geqq 0$ であるから，このとき $|\vec{c}|$ も最小となる。

したがって　$t=-\frac{2}{5}$ のとき最小値 1

6．次のベクトルのなす角 θ を求めよ。　$\vec{a}=(2,\ 3)$，$\vec{b}=(-1,\ 5)$

解答　$\theta=45^\circ$

解説

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-1)+3\times 5=13$

よって　$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{13}{\sqrt{2^2+3^2}\sqrt{(-1)^2+5^2}}$
$=\frac{13}{\sqrt{13}\sqrt{26}}=\frac{13}{13\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ であるから　$\theta=45^\circ$

7．ベクトル $\vec{a}=(-3,\ 4)$ に垂直な単位ベクトルを求めよ。

解答　$\vec{e}=\left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)$ または $\vec{e}=\left(-\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5}\right)$

解説

求めるベクトルを $\vec{e}=(x,\ y)$ とする。

$\vec{a}\perp\vec{e}$ であるから　$\vec{a}\cdot\vec{e}=0$　よって　$-3x+4y=0$

すなわち　$y=\frac{3}{4}x$ …… ①

$|\vec{e}|=1$ であるから　$|\vec{e}|^2=1^2$　よって　$x^2+y^2=1$

① を代入して　$x^2+\left(\frac{3}{4}x\right)^2=1$　ゆえに，$\frac{25}{16}x^2=1$ から　$x=\pm\frac{4}{5}$

① から　$x=\frac{4}{5}$ のとき　$y=\frac{3}{5}$，　$x=-\frac{4}{5}$ のとき　$y=-\frac{3}{5}$

したがって　$\vec{e}=\left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)$ または $\vec{e}=\left(-\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5}\right)$

8．$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 30° であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$|3\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めよ。

解答　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$，$|3\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$

解説

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 30^\circ=\sqrt{3}\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$

よって　$|3\vec{a}-\vec{b}|^2=(3\vec{a}-\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})=9|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$
$=9\times(\sqrt{3})^2-6\times 3+2^2=13$

$|3\vec{a}-\vec{b}|\geqq 0$ であるから　　$|3\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$

9. $|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=2$ で，ベクトル $\vec{a}-4\vec{b}$，$\vec{a}$ が垂直であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

解答　$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$，$\theta=60^\circ$

解説

$(\vec{a}-4\vec{b})\perp\vec{a}$ であるから　　$(\vec{a}-4\vec{b})\cdot\vec{a}=0$

よって　　$|\vec{a}|^2-4\vec{b}\cdot\vec{a}=0$

$|\vec{a}|=4$ であるから　　$4^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

したがって　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$

また　　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{4}{4\times 2}=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ であるから　　$\theta=60^\circ$

10. $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-4\vec{b}|=7$ のとき，$\vec{a}+t\vec{b}$，$\vec{a}+\vec{b}$ が垂直になるように，t の値を定めよ。

解答　$t=-\dfrac{12}{7}$

解説

$|\vec{a}-4\vec{b}|=7$ であるから　　$|\vec{a}-4\vec{b}|^2=7^2$

よって　　$|\vec{a}|^2-8\vec{a}\cdot\vec{b}+16|\vec{b}|^2=49$　　　ゆえに　　$3^2-8\vec{a}\cdot\vec{b}+16\times 2^2=49$

したがって　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

$(\vec{a}+t\vec{b})\perp(\vec{a}+\vec{b})$ となるための条件は　　$(\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=0$

すなわち　　$|\vec{a}|^2+(1+t)\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0$

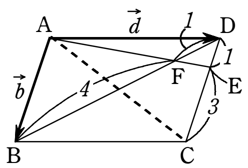
よって　　$3^2+(1+t)\times 3+t\times 2^2=0$

したがって　　$t=-\dfrac{12}{7}$

11. 平行四辺形 ABCD において，辺 CD を 3 : 1 に内分する点を E，対角線 BD を 4 : 1 に内分する点を F とする。このとき，3 点 A，F，E は一直線上にあることを証明せよ。

解答　略

解説



$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とすると　　$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{b}+\vec{d}$

よって　　$\overrightarrow{AE}=\dfrac{1\cdot\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AD}}{3+1}=\dfrac{(\vec{b}+\vec{d})+3\vec{d}}{4}=\dfrac{\vec{b}+4\vec{d}}{4}$

また　　$\overrightarrow{AF}=\dfrac{1\cdot\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AD}}{4+1}=\dfrac{\vec{b}+4\vec{d}}{5}$

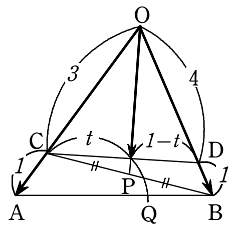
ゆえに　　$\overrightarrow{AF}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AE}$

したがって，3 点 A，F，E は一直線上にある。

12. △OAB の辺 OA を 3 : 1 に内分する点を C，辺 OB を 4 : 1 に内分する点を D とし，辺 BC の中点を P とする。直線 OP と CD の交点を Q とするとき，$\overrightarrow{OQ}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。また，CQ : QD を求めよ。

解答　$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{OB}$，CQ : QD = 5 : 4

解説



CQ : QD $=t:(1-t)$ とすると

$\overrightarrow{OQ}=(1-t)\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{OD}$

$=\dfrac{3}{4}(1-t)\overrightarrow{OA}+\dfrac{4}{5}t\overrightarrow{OB}$　…… ①

また，3 点 O，P，Q は一直線上にあるから，$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}$ となる実数 k がある。

ここで　　$\overrightarrow{OP}=\dfrac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$

$=\dfrac{3}{8}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

よって　　$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{3}{8}k\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}k\overrightarrow{OB}$

ゆえに　　$\dfrac{3}{4}(1-t)\overrightarrow{OA}+\dfrac{4}{5}t\overrightarrow{OB}=\dfrac{3}{8}k\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}k\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{OB}\neq\vec{0}$ で，かつ $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ は平行でないから

$\dfrac{3}{4}(1-t)=\dfrac{3}{8}k$　…… ②，　　$\dfrac{4}{5}t=\dfrac{1}{2}k$　…… ③

③ から　　$k=\dfrac{8}{5}t$

これを ② に代入すると　　$\dfrac{3}{4}(1-t)=\dfrac{3}{5}t$　　　よって　　$t=\dfrac{5}{9}$

$t=\dfrac{5}{9}$ を ① に代入すると　　$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{OB}$

また　　CQ : QD $=\dfrac{5}{9}:\left(1-\dfrac{5}{9}\right)=5:4$