数学演習（面積の応用）Ｒ１．１０．２９　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　）

$\boxed{1}$ a を正の実数とし，点 $\mathrm{A}\left(0,\ a+\dfrac{1}{2a}\right)$ と曲線 $C:y=ax^2$ および C 上の点 $\mathrm{P}(1,\ a)$ を考える。曲線 C と y 軸，および線分 AP で囲まれる図形の面積を $S(a)$ とするとき，$S(a)$ の最小値と，そのときの a の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 曲線 $y=x^3-6x^2+9x$ と直線 $y=mx$ で囲まれた 2 つの図形の面積が等しくなるような定数 m の値を求めよ。ただし，$0<m<9$ とする。

$\boxed{3}$ $f(t)=\displaystyle\int_0^1 |x^2-tx|\,dx$ とする。$f(t)$ の最小値と，最小値を与える t の値を求めよ。

$\boxed{4}$ (1) 曲線 $x=-y^2+2y-2$，y 軸，2 直線 $y=-1$，$y=2$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(2) 曲線 $x=y^2-3y$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

$\boxed{5}$ a は正の定数とする。放物線 $y=x^2+a$ 上の任意の点 P における接線と放物線 $y=x^2$ で囲まれる図形の面積は，点 P の位置によらず一定であることを示し，その一定の値を求めよ。

$\boxed{6}$ a は $0<a<1$ の範囲の定数とする。直線 $\ell : y=1-a^2$ と曲線 $C : y=1-x^2$ $(x \geqq 0)$ について

(1) 曲線 C，y 軸，直線 ℓ で囲まれる部分の面積を S_1 とし，曲線 C，直線 ℓ，直線 $x=1$ で囲まれる部分の面積を S_2 とする。S_1，S_2 を a を用いて表せ。

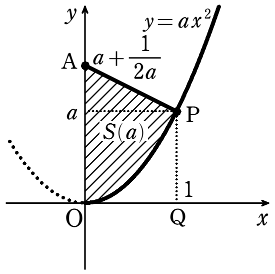
(2) $S=S_1+S_2$ とおくとき，$0<a<1$ の範囲における S の最小値を求めよ。

数学演習（面積の応用）Ｒ１．１０．２９　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　）

$\boxed{1}$ a を正の実数とし，点 $\mathrm{A}\left(0,\ a+\dfrac{1}{2a}\right)$ と曲線 $C:y=ax^2$ および C 上の点 $\mathrm{P}(1,\ a)$ を考える。曲線 C と y 軸，および線分 AP で囲まれる図形の面積を $S(a)$ とするとき，$S(a)$ の最小値と，そのときの a の値を求めよ。

解答　$a=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ のとき最小値 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

解説



直線 AP の方程式は　$y=\dfrac{a-\left(a+\frac{1}{2a}\right)}{1-0}x+a+\dfrac{1}{2a}$

すなわち　$y=-\dfrac{1}{2a}x+a+\dfrac{1}{2a}$

したがって

$$S(a)=\int_0^1\left\{\left(-\frac{1}{2a}x+a+\frac{1}{2a}\right)-ax^2\right\}dx$$
$$=\left[-\frac{a}{3}x^3-\frac{1}{4a}x^2+\left(a+\frac{1}{2a}\right)x\right]_0^1=\frac{2}{3}a+\frac{1}{4a}$$

$a>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$$S(a)=\frac{2}{3}a+\frac{1}{4a}\geqq 2\sqrt{\frac{2}{3}a\cdot\frac{1}{4a}}=2\sqrt{\frac{1}{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

等号が成り立つのは，$\dfrac{2}{3}a=\dfrac{1}{4a}$　すなわち　$a^2=\dfrac{3}{8}$ のときである。

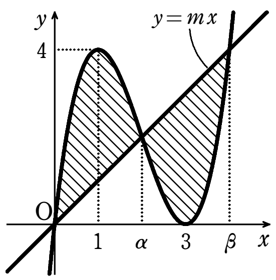
$a>0$ であるから　$a=\sqrt{\dfrac{3}{8}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

よって，$S(a)$ は $a=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ のとき最小値 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ をとる。

$\boxed{2}$ 曲線 $y=x^3-6x^2+9x$ と直線 $y=mx$ で囲まれた 2 つの図形の面積が等しくなるような定数 m の値を求めよ。ただし，$0<m<9$ とする。

解答　$m=1$

解説



曲線と直線の交点の x 座標は，$x^3-6x^2+9x=mx$ を解くと，$x(x-3)^2=mx$ から　$x\{(x-3)^2-m\}=0$

$0<m<9$ であるから　$x=0,\ 3\pm\sqrt{m}$

ここで，$3-\sqrt{m}=\alpha$，$3+\sqrt{m}=\beta$ とおくと

$0<\alpha<\beta$

2 つの図形の面積が等しくなるための条件は

$$\int_0^\alpha\{(x^3-6x^2+9x)-mx\}dx=\int_\alpha^\beta\{mx-(x^3-6x^2+9x)\}dx$$

よって

$$\int_0^\alpha\{x^3-6x^2+(9-m)x\}dx-\left[-\int_\alpha^\beta\{x^3-6x^2+(9-m)x\}dx\right]=0$$

したがって　$\displaystyle\int_0^\beta\{x^3-6x^2+(9-m)x\}dx=0$

左辺の定積分を I とすると　$I=\left[\dfrac{x^4}{4}-2x^3+\dfrac{9-m}{2}x^2\right]_0^\beta=\dfrac{\beta^2}{4}\{\beta^2-8\beta+2(9-m)\}$

$I=0$ のとき，$\beta\neq0$ であるから　$\beta^2-8\beta+2(9-m)=0$

$3+\sqrt{m}=\beta$ を代入して　$m+2\sqrt{m}-3=0$

よって　$(\sqrt{m}-1)(\sqrt{m}+3)=0$

$\sqrt{m}+3>0$ であるから　$\sqrt{m}=1$　すなわち　$m=1$　($0<m<9$ を満たす)

$\boxed{3}$ $f(t)=\displaystyle\int_0^1|x^2-tx|dx$ とする。$f(t)$ の最小値と，最小値を与える t の値を求めよ。

解答　$t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$

解説

$g(x)=x^2-tx$ とする。

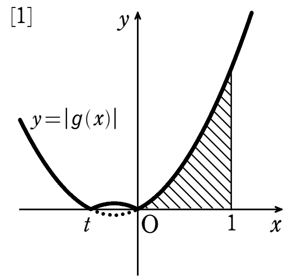
$g(x)=0$ の解は　$x=0,\ t$

[1]　$t\leqq0$ のとき

$0\leqq x\leqq1$ では　$g(x)\geqq0$

よって　$f(t)=\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1(x^2-tx)dx$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{t}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{t}{2}$$



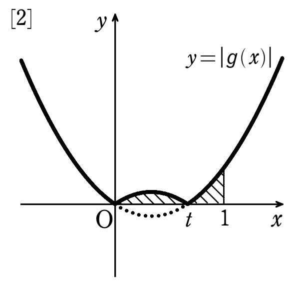
[2]　$0<t<1$ のとき

$0\leqq x\leqq t$ では　$g(x)\leqq0$,

$t\leqq x\leqq1$ では　$g(x)\geqq0$

よって　$f(t)=-\displaystyle\int_0^t g(x)\,dx+\int_t^1 g(x)\,dx$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{t}{2}x^2\right]_0^t+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{t}{2}x^2\right]_t^1$$
$$=\frac{t^3}{3}-\frac{t}{2}+\frac{1}{3}$$



$f'(t)=t^2-\dfrac{1}{2}=\left(t+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(t-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$f'(t)=0$ とすると　$t=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$0<t<1$ における増減表は右のようになる。

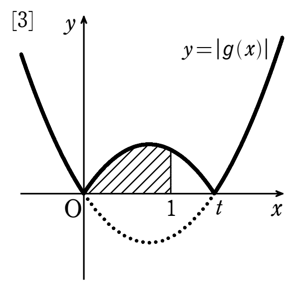
t	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	$\frac{2-\sqrt{2}}{6}$	↗	

[3]　$t\geqq1$ のとき

$0\leqq x\leqq1$ では　$g(x)\leqq0$

よって　$f(t)=-\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$

$$=-\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{2}\right)=\frac{t}{2}-\frac{1}{3}$$

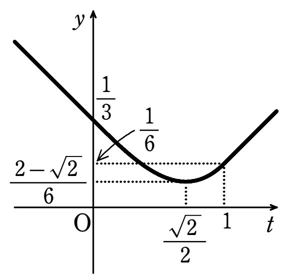


以上から，$y=f(t)$ のグラフは，右の図のようになる。

したがって，$f(t)$ は

$t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$

をとる。



$\boxed{4}$ (1)　曲線 $x=-y^2+2y-2$，y 軸，2 直線 $y=-1$，$y=2$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(2)　曲線 $x=y^2-3y$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

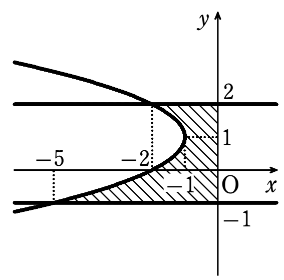
解答　(1)　6　　(2)　$\dfrac{32}{3}$

解説

(1)　$x=-y^2+2y-2=-(y-1)^2-1$

$-1\leqq y\leqq2$ では $-(y-1)^2-1<0$ であるから，右の図より

$$S=-\int_{-1}^2(-y^2+2y-2)dy$$
$$=-\left[-\frac{y^3}{3}+y^2-2y\right]_{-1}^2$$
$$=-\left\{\left(-\frac{8}{3}+4-4\right)-\left(\frac{1}{3}+1+2\right)\right\}=6$$



(2)　$x=y^2-3y=\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}$

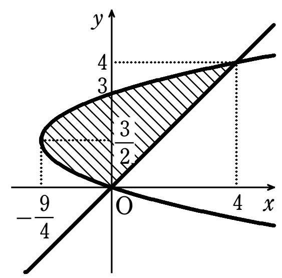
曲線と直線の交点の y 座標は，$y^2-3y=y$

すなわち $y^2-4y=0$ を解くと，$y(y-4)=0$ から

$y=0,\ 4$

よって，右の図から，求める面積は

$$S=\int_0^4\{y-(y^2-3y)\}dy$$
$$=-\int_0^4(y^2-4y)dy=-\int_0^4 y(y-4)\,dy$$
$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)(4-0)^3=\frac{32}{3}$$



$\boxed{5}$ a は正の定数とする。放物線 $y=x^2+a$ 上の任意の点 P における接線と放物線 $y=x^2$ で囲まれる図形の面積は，点 P の位置によらず一定であることを示し，その一定の値を求めよ。

解答　証明略，$\dfrac{4a\sqrt{a}}{3}$

解説

$\mathrm{P}(p,\ p^2+a)$ とする。

放物線 $y=x^2+a$ 上の点 P における接線の方程式は，$y'=2x$ であるから

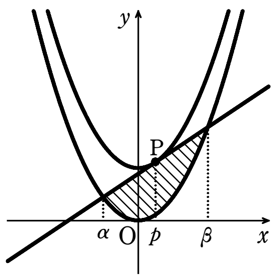
$y-(p^2+a)=2p(x-p)$　すなわち　$y=2px-p^2+a$

この接線と放物線 $y=x^2$ の交点の x 座標を求めると，$x^2=2px-p^2+a$ から

$$(x-p)^2=a$$

$a>0$ であるから　　$x=p\pm\sqrt{a}$

$\alpha=p-\sqrt{a}$，$\beta=p+\sqrt{a}$ とおくと，題意の図形の面積は



$$\int_\alpha^\beta\{(2px-p^2+a)-x^2\}dx$$

$$=\int_\alpha^\beta(-x^2+2px-p^2+a)dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(2\sqrt{a})^3=\frac{4a\sqrt{a}}{3}$$

よって，題意の面積は点 P の位置によらず一定である。

$\boxed{6}$ a は $0<a<1$ の範囲の定数とする。直線 ℓ：$y=1-a^2$ と曲線 C：$y=1-x^2$ $(x\geqq 0)$ について

(1)　曲線 C，y 軸，直線 ℓ で囲まれる部分の面積を S_1 とし，曲線 C，直線 ℓ，直線 $x=1$ で囲まれる部分の面積を S_2 とする。S_1，S_2 を a を用いて表せ。

(2)　$S=S_1+S_2$ とおくとき，$0<a<1$ の範囲における S の最小値を求めよ。

解答　(1)　$S_1=\dfrac{2}{3}a^3$，$S_2=\dfrac{2}{3}a^3-a^2+\dfrac{1}{3}$　　(2)　$a=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{4}$

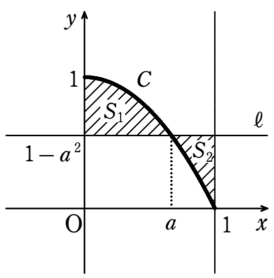
解説

(1)　直線 ℓ と曲線 C の交点の x 座標は，

$1-a^2=1-x^2$ から　　$x^2=a^2$

$x\geqq 0$，$0<a<1$ であるから　　$x=a$

したがって，図から



$$S_1=\int_0^a\{(1-x^2)-(1-a^2)\}dx=\int_0^a(a^2-x^2)dx$$

$$=\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{2}{3}a^3$$

$$S_2=\int_a^1\{(1-a^2)-(1-x^2)\}dx=\int_a^1(x^2-a^2)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-a^2x\right]_a^1=\frac{2}{3}a^3-a^2+\frac{1}{3}$$

(2)　(1) の結果から　　$S=S_1+S_2=\dfrac{4}{3}a^3-a^2+\dfrac{1}{3}$

ゆえに　　$S'=4a^2-2a=2a(2a-1)$

$S'=0$ とすると　　$a=0,\ \dfrac{1}{2}$

$0<a<1$ における S の増減表は右のようになる。

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
S'		$-$	0	$+$	
S		↘	極小	↗	

よって，$a=\dfrac{1}{2}$ のとき，S は極小かつ最小となり，最小値は

$$\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$$