数学演習（面積）Ｒ１．１０．２８　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 次の曲線，直線と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(1) $y=x^2+x-2$　　(2) $y=-2x^2-3x+2$

(3) $y=x^2-4x-5$ $(x\leqq 4)$，$x=-2$，$x=4$

$\boxed{2}$ 次の曲線や直線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(1) $y=x^2-x-1$，$y=x+2$　　(2) $y=x^2-2x$，$y=-x^2+x+2$

$\boxed{3}$ (1) 連立不等式 $y\geqq x^2$，$y\geqq 2-x$，$y\leqq x+6$ の表す領域を図示せよ。

(2) (1) の領域の面積 S を求めよ。

$\boxed{4}$ 放物線 C : $y=x^2-4x+3$ 上の点 P$(0,\ 3)$，Q$(6,\ 15)$ における接線を，それぞれ ℓ，m とする。この 2 つの接線と放物線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

$\boxed{5}$ 2 つの放物線 C_1 : $y=x^2$，C_2 : $y=x^2-8x+8$ を考える。

(1) C_1 と C_2 の両方に接する直線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) 2 つの放物線 C_1，C_2 と直線 ℓ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

$\boxed{6}$ (1) 曲線 $y=x^3-2x^2-x+2$ と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(2) 曲線 $y=x^3-4x$ と曲線 $y=3x^2$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

$\boxed{7}$ (1) $\displaystyle\int_1^4 |x-2|\,dx$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^2 |x^2+x-2|\,dx$ を求めよ。

$\boxed{8}$ 放物線 $L: y=x^2$ と点 $\mathrm{R}\left(0,\ \dfrac{5}{4}\right)$ を中心とする円 C が異なる 2 点で接するとき

(1) 2 つの接点の座標を求めよ。

(2) 2 つの接点を両端とする円 C の短い方の弧と L とで囲まれる図形の面積 S を求めよ。

$\boxed{9}$ 放物線 $y=-x(x-2)$ と x 軸で囲まれた図形の面積が，直線 $y=ax$ によって 2 等分されるとき，定数 a の値を求めよ。ただし，$0<a<2$ とする。

$\boxed{10}$ 点 $(1,\ 2)$ を通る直線と放物線 $y=x^2$ で囲まれる図形の面積を S とする。S の最小値を求めよ。

$\boxed{11}$ 曲線 $y=x^3-5x^2+2x+6$ とその曲線上の点 $(3,\ -6)$ における接線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

1 次の曲線，直線と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

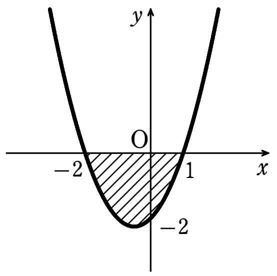
(1) $y=x^2+x-2$　　(2) $y=-2x^2-3x+2$

(3) $y=x^2-4x-5$ $(x\leqq 4)$，$x=-2$，$x=4$

解答　(1) $\dfrac{9}{2}$　(2) $\dfrac{125}{24}$　(3) $\dfrac{110}{3}$

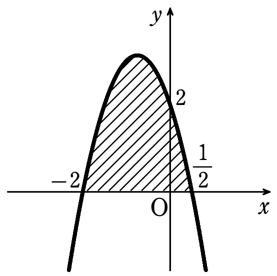
解説

(1) 曲線と x 軸の交点の x 座標は，
$x^2+x-2=0$ を解くと
$(x+2)(x-1)=0$ から　$x=-2$，1
図から，求める面積は



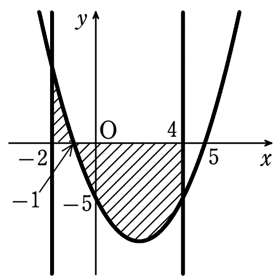
$$S=-\int_{-2}^{1}(x^2+x-2)dx$$
$$=-\int_{-2}^{1}(x+2)(x-1)dx$$
$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{1-(-2)\}^3=\frac{9}{2}$$

(2) 曲線と x 軸の交点の x 座標は，
$-2x^2-3x+2=0$ を解くと
$(x+2)(2x-1)=0$ から　$x=-2$，$\dfrac{1}{2}$
図から，求める面積は



$$S=\int_{-2}^{\frac{1}{2}}(-2x^2-3x+2)dx$$
$$=-2\int_{-2}^{\frac{1}{2}}(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)dx$$
$$=-2\left(-\frac{1}{6}\right)\left\{\frac{1}{2}-(-2)\right\}^3=\frac{125}{24}$$

(3) 曲線と x 軸の交点の x 座標は，
$x^2-4x-5=0$ を解くと　$x=-1$，5
図から，求める面積は



$$S=\int_{-2}^{-1}(x^2-4x-5)dx-\int_{-1}^{4}(x^2-4x-5)dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2-5x\right]_{-2}^{-1}-\left[\frac{x^3}{3}-2x^2-5x\right]_{-1}^{4}$$
$$=2\cdot\frac{8}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{92}{3}\right)=\frac{110}{3}$$

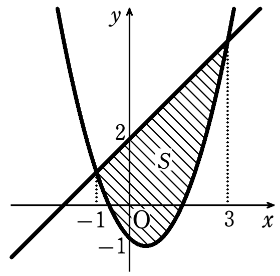
2 次の曲線や直線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(1) $y=x^2-x-1$，$y=x+2$　　(2) $y=x^2-2x$，$y=-x^2+x+2$

解答　(1) $\dfrac{32}{3}$　(2) $\dfrac{125}{24}$

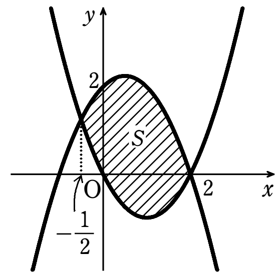
解説

(1) 曲線と直線の交点の x 座標は，$x^2-x-1=x+2$
すなわち $x^2-2x-3=0$ を解くと
$(x+1)(x-3)=0$ から　$x=-1$，3
よって，右の図から，求める面積は



$$S=\int_{-1}^{3}\{(x+2)-(x^2-x-1)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)dx=-\int_{-1}^{3}(x+1)(x-3)dx$$
$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{3-(-1)\}^3=\frac{32}{3}$$

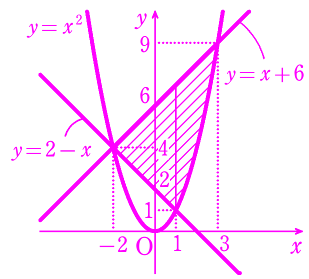
(2) 2 曲線の交点の x 座標は，$x^2-2x=-x^2+x+2$
すなわち $2x^2-3x-2=0$ を解くと
$(2x+1)(x-2)=0$ から　$x=-\dfrac{1}{2}$，2
よって，右の図から，求める面積は



$$S=\int_{-\frac{1}{2}}^{2}\{(-x^2+x+2)-(x^2-2x)\}dx$$
$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{2}(-2x^2+3x+2)dx$$
$$=-2\int_{-\frac{1}{2}}^{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)dx=-2\left(-\frac{1}{6}\right)\left\{2-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}^3=\frac{125}{24}$$

3 (1) 連立不等式 $y\geqq x^2$，$y\geqq 2-x$，$y\leqq x+6$ の表す領域を図示せよ。
(2) (1) の領域の面積 S を求めよ。

解答　(1) [図] 境界線を含む　(2) $\dfrac{49}{3}$

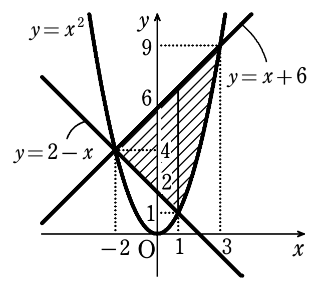


解説

(1) 境界線の交点の座標は，次の 3 つの連立方程式の解である。

① $\begin{cases}y=x^2\\y=2-x\end{cases}$　② $\begin{cases}y=x^2\\y=x+6\end{cases}$　③ $\begin{cases}y=2-x\\y=x+6\end{cases}$

連立方程式 ① を解くと
$(x,\ y)=(-2,\ 4)$，$(1,\ 1)$
連立方程式 ② を解くと
$(x,\ y)=(-2,\ 4)$，$(3,\ 9)$
連立方程式 ③ を解くと
$(x,\ y)=(-2,\ 4)$
したがって，求める領域は，図の斜線部分である。
ただし，境界線を含む。



(2) 直線 $x=1$ と直線 $y=x+6$ の交点の座標は　$(1,\ 7)$
よって，(1) の図から，求める面積は

$$S=\frac{1}{2}\times\{1-(-2)\}\times(7-1)+\int_{1}^{3}\{(x+6)-x^2\}dx$$
$$=9+\int_{1}^{3}(-x^2+x+6)dx=9+\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+6x\right]_{1}^{3}$$
$$=9+\frac{22}{3}=\frac{49}{3}$$

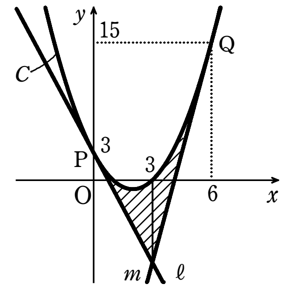
4 放物線 C：$y=x^2-4x+3$ 上の点 P$(0,\ 3)$，Q$(6,\ 15)$ における接線を，それぞれ ℓ，m とする。この 2 つの接線と放物線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

解答　18

解説

$y=x^2-4x+3$ から　$y'=2x-4$
ℓ の方程式は，$y-3=(2\cdot 0-4)(x-0)$ から　$y=-4x+3$
m の方程式は，$y-15=(2\cdot 6-4)(x-6)$ から　$y=8x-33$
ℓ と m の交点の x 座標は，$-4x+3=8x-33$ を解くと
$12x-36=0$　ゆえに　$x=3$
よって，求める面積 S は

$$S=\int_{0}^{3}\{(x^2-4x+3)-(-4x+3)\}dx$$
$$+\int_{3}^{6}\{(x^2-4x+3)-(8x-33)\}dx$$
$$=\int_{0}^{3}x^2dx+\int_{3}^{6}(x-6)^2dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{3}+\left[\frac{(x-6)^3}{3}\right]_{3}^{6}$$
$$=9+9=18$$



5 2 つの放物線 C_1：$y=x^2$，C_2：$y=x^2-8x+8$ を考える。
(1) C_1 と C_2 の両方に接する直線 ℓ の方程式を求めよ。
(2) 2 つの放物線 C_1，C_2 と直線 ℓ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

解答　(1) $y=-2x-1$　(2) $\dfrac{16}{3}$

解説

(1) C_1 上の点 $(p,\ p^2)$ における接線の方程式は，$y'=2x$ から
$y-p^2=2p(x-p)$　すなわち　$y=2px-p^2$　……①
この直線が C_2 にも接するための条件は，2 次方程式
$2px-p^2=x^2-8x+8$
すなわち　$x^2-2(p+4)x+p^2+8=0$　……②
が重解をもつことであり，② の判別式を D とすると　$D=0$
ここで　$\dfrac{D}{4}=\{-(p+4)\}^2-1\cdot(p^2+8)=8(p+1)$
よって　$8(p+1)=0$　ゆえに　$p=-1$
① から，直線 ℓ の方程式は　$y=-2x-1$

別解　C_2 上の点 $(q,\ q^2-8q+8)$ における接線の方程式は
$y-(q^2-8q+8)=(2q-8)(x-q)$　すなわち　$y=2(q-4)x-q^2+8$　……③
① と ③ が一致するとき　$2p=2(q-4)$，$-p^2=-q^2+8$

これを解いて　　$p=-1$，$q=3$

よって，直線 ℓ の方程式は　　$y=-2x-1$

(2)　$p=-1$ のとき，2 次方程式 ② の解は　　$x=-1+4=3$

C_1，C_2 との接点の x 座標は，それぞれ

$x=-1$，3

C_1 と C_2 の交点の x 座標は，$x^2=x^2-8x+8$ から

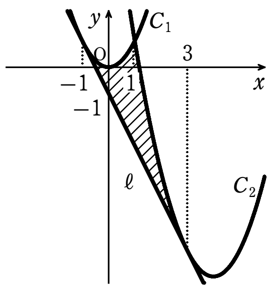
$x=1$

したがって，求める面積は

$$S=\int_{-1}^{1}\{x^2-(-2x-1)\}dx+\int_{1}^{3}\{x^2-8x+8-(-2x-1)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x+1)^2dx+\int_{1}^{3}(x-3)^2dx$$

$$=\left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_{1}^{3}=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$



$\boxed{6}$ (1)　曲線 $y=x^3-2x^2-x+2$ と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(2)　曲線 $y=x^3-4x$ と曲線 $y=3x^2$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

解答　(1)　$\dfrac{37}{12}$　　(2)　$\dfrac{131}{4}$

解説

(1)　$x^3-2x^2-x+2=x^2(x-2)-(x-2)=(x^2-1)(x-2)$

$=(x+1)(x-1)(x-2)$

よって，曲線と x 軸の交点の x 座標は　　$x=\pm1$，2

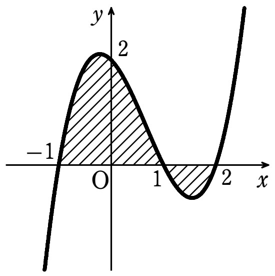
したがって，図から，求める面積は

$$S=\int_{-1}^{1}(x^3-2x^2-x+2)dx+\int_{1}^{2}\{-(x^3-2x^2-x+2)\}dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(-2x^2+2)dx-\int_{1}^{2}(x^3-2x^2-x+2)dx$$

$$=2\cdot2\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_{0}^{1}-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{1}^{2}$$

$$=\frac{8}{3}-\frac{2}{3}+\frac{13}{12}=\frac{37}{12}$$



(2)　2 曲線の共有点の x 座標は，$x^3-4x=3x^2$ を解くと，

$x(x^2-3x-4)=0$ から　　$x(x+1)(x-4)=0$

よって　　$x=-1$，0，4

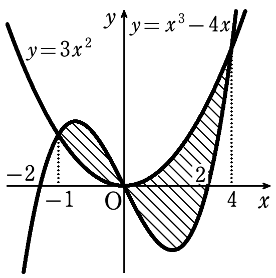
ゆえに，図から，求める面積は

$$S=\int_{-1}^{0}\{(x^3-4x)-3x^2\}dx+\int_{0}^{4}\{3x^2-(x^3-4x)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(x^3-3x^2-4x)dx-\int_{0}^{4}(x^3-3x^2-4x)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-x^3-2x^2\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{x^4}{4}-x^3-2x^2\right]_{0}^{4}$$

$$=-\left(\frac{1}{4}+1-2\right)-(64-64-32)=\frac{3}{4}+32=\frac{131}{4}$$



$\boxed{7}$ (1)　$\displaystyle\int_{1}^{4}|x-2|dx$　を求めよ。　　(2)　$\displaystyle\int_{0}^{2}|x^2+x-2|dx$　を求めよ。

解答　(1)　$\dfrac{5}{2}$　　(2)　3

解説

(1)　$1\leqq x\leqq2$ のとき　　$|x-2|=-(x-2)$

$2\leqq x\leqq4$ のとき　　$|x-2|=x-2$　　であるから

$$\int_{1}^{4}|x-2|dx=\int_{1}^{2}\{-(x-2)\}dx+\int_{2}^{4}(x-2)dx$$

$$=-\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_{1}^{2}+\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_{2}^{4}$$

$$=-\left\{(2-4)-\left(\frac{1}{2}-2\right)\right\}+(8-8)-(2-4)=\frac{5}{2}$$

(2)　$|x^2+x-2|=|(x+2)(x-1)|$

$0\leqq x\leqq1$ のとき　　$|x^2+x-2|=-(x^2+x-2)$

$1\leqq x\leqq2$ のとき　　$|x^2+x-2|=x^2+x-2$　　であるから

$$\int_{0}^{2}|x^2+x-2|dx=\int_{0}^{1}\{-(x^2+x-2)\}dx+\int_{1}^{2}(x^2+x-2)dx$$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_{0}^{1}+\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_{1}^{2}$$

$$=-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)\times2+\left(\frac{8}{3}+2-4\right)=3$$

$\boxed{8}$ 放物線 L：$y=x^2$ と点 $\mathrm{R}\left(0,\ \dfrac{5}{4}\right)$ を中心とする円 C が異なる 2 点で接するとき

(1)　2 つの接点の座標を求めよ。

(2)　2 つの接点を両端とする円 C の短い方の弧と L とで囲まれる図形の面積 S を求めよ。

解答　(1)　$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$，$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$　　(2)　$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\pi}{3}$

解説

(1)　$y=x^2$ から　　$y'=2x$

L と C の接点 P の x 座標を t $(t\neq0)$ とし，この点での共通の接線を ℓ とすると，ℓ の傾きは　　$2t$

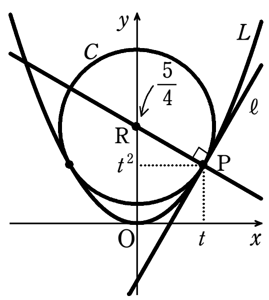
点 R と点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ を通る直線の傾きは

$$\frac{t^2-\frac{5}{4}}{t-0}=\frac{4t^2-5}{4t}$$

$\mathrm{RP}\perp\ell$ から　　$2t\cdot\dfrac{4t^2-5}{4t}=-1$　　ゆえに　$t^2=\dfrac{3}{4}$

よって　　$t=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ゆえに，接点の座標は　　$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$，$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$



(2)　右図のように，接点 A，B と点 C を定めると，

$\mathrm{RC}:\mathrm{AC}=1:\sqrt{3}$ から

$$\angle\mathrm{ORA}=\frac{\pi}{3},\ \ \mathrm{RA}=2\cdot\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{4}\right)=1$$

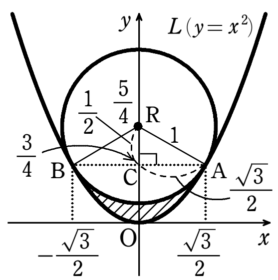
L と直線 AB で囲まれた部分の面積を S_1 とすると

$S=S_1+\triangle\mathrm{RBA}-$(扇形 RBA)

$$=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{3}{4}-x^2\right)dx+\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{2}{3}\pi$$

$$=-\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)dx+\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}^3+\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}$$



$\boxed{9}$ 放物線 $y=-x(x-2)$ と x 軸で囲まれた図形の面積が，直線 $y=ax$ によって 2 等分されるとき，定数 a の値を求めよ。ただし，$0<a<2$ とする。

解答　$a=2-\sqrt[3]{4}$

解説

放物線 $y=-x(x-2)$ と直線 $y=ax$ の交点の x 座標は，方程式 $-x(x-2)=ax$ の解である。

ゆえに　　$x\{x-(2-a)\}=0$

よって　　$x=0$，$2-a$

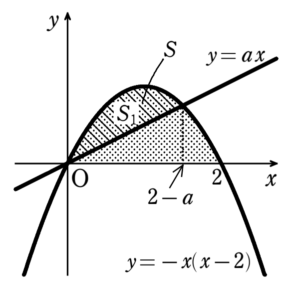
放物線と直線 $y=ax$，放物線と x 軸で囲まれた図形の面積を，それぞれ S_1，S とすると

$$S_1=\int_{0}^{2-a}\{-x(x-2)-ax\}dx$$

$$=-\int_{0}^{2-a}x\{x-(2-a)\}dx$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{(2-a)-0\}^3=\frac{1}{6}(2-a)^3$$

$$S=\int_{0}^{2}\{-x(x-2)\}dx=-\int_{0}^{2}x(x-2)dx=-\left(-\frac{1}{6}\right)(2-0)^3=\frac{4}{3}$$



求める条件は　　$2S_1=S$

ゆえに　　$\dfrac{1}{3}(2-a)^3=\dfrac{4}{3}$　　すなわち　$(2-a)^3=4$

よって　　$2-a=\sqrt[3]{4}$　　すなわち　$a=2-\sqrt[3]{4}$

参考　x 軸の方程式は $y=0$ で，これは $y=ax$ において $a=0$ とおいたものである。

よって，上の式 $S_1=\dfrac{1}{6}(2-a)^3$ で $a=0$ とおくと，S_1 は S を表す。

したがって，$S=\dfrac{1}{6}(2-0)^3=\dfrac{4}{3}$ としても求められる。

$\boxed{10}$ 点 $(1,\ 2)$ を通る直線と放物線 $y=x^2$ で囲まれる図形の面積を S とする。S の最小値を求めよ。

解答　$\dfrac{4}{3}$

解説

点 $(1,\ 2)$ を通る傾き m の直線の方程式は

$y=m(x-1)+2$ ……①　と表される。

直線 ① と放物線 $y=x^2$ の共有点の x 座標は，

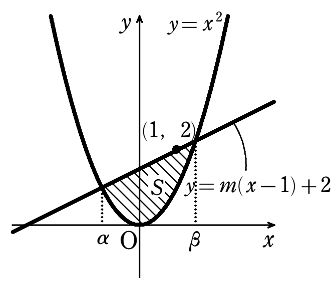
方程式　　$x^2=m(x-1)+2$

すなわち　$x^2-mx+m-2=0$

の実数解である。この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D=(-m)^2-4(m-2)=m^2-4m+8$$

$$=(m-2)^2+4$$



常に $D>0$ であるから，直線 ① と放物線 $y=x^2$ は常に異なる 2 点で交わる。

その 2 つの交点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とすると

$$S=\int_\alpha^\beta\{m(x-1)+2-x^2\}dx=-\int_\alpha^\beta(x^2-mx+m-2)dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

また　　$\beta-\alpha=\dfrac{m+\sqrt{D}}{2}-\dfrac{m-\sqrt{D}}{2}=\sqrt{D}=\sqrt{(m-2)^2+4}$

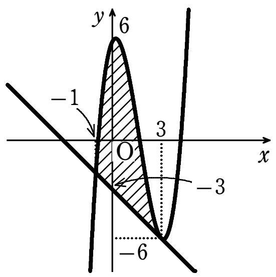
したがって，正の数 $\beta-\alpha$ は，$m=2$ のとき最小で，このとき $(\beta-\alpha)^3$ も最小であり，

S の最小値は　$\dfrac{1}{6}(\sqrt{4})^3=\dfrac{4}{3}$

$\boxed{11}$ 曲線 $y=x^3-5x^2+2x+6$ とその曲線上の点 $(3,\ -6)$ における接線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

解答　$\dfrac{64}{3}$

解説



$y'=3x^2-10x+2$ であるから，接線の方程式は

$y-(-6)=(3\cdot3^2-10\cdot3+2)(x-3)$

すなわち　　$y=-x-3$

この接線と曲線の共有点の x 座標は，

$x^3-5x^2+2x+6=-x-3$ の解である。

これから　　$x^3-5x^2+3x+9=0$

ゆえに　　$(x-3)^2(x+1)=0$

よって　　$x=3,\ -1$

したがって，図から，求める面積は

$$S=\int_{-1}^3\{(x^3-5x^2+2x+6)-(-x-3)\}dx=\int_{-1}^3(x-3)^2(x+1)dx$$

$$=\int_{-1}^3(x-3)^2\{(x-3)+4\}dx=\int_{-1}^3\{(x-3)^3+4(x-3)^2\}dx$$

$$=\left[\frac{(x-3)^4}{4}\right]_{-1}^3+4\left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_{-1}^3=-64+\frac{256}{3}=\frac{64}{3}$$