数学演習（不定積分･定積分）Ｒ１．１０．２７

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

$\boxed{1}$ 次の不定積分を求めよ。ただし，(4) の x は t に無関係とする。

(1) $\int (4x^3+6x^2-2x+5)dx$　(2) $\int (x+2)(1-3x)dx$

(3) $\int x(x-1)(x+2)dx-\int (x^2-1)(x+2)dx$　(4) $\int (tx+1)(x+2t)dt$

$\boxed{2}$ (1) $f'(x)=3x^2-2x$，$f(2)=0$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ が点 $(1,\ 0)$ を通り，更に点 $(x,\ f(x))$ における接線の傾きが x^2-1 であるとき，$f(x)$ を求めよ。

$\boxed{3}$ 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^2 (x^3-3x^2-1)dx$　(2) $\int_{-1}^2 (3t-1)(t+1)dt$

(3) $\int_1^4 (x+1)^2dx-\int_1^4 (x-1)^2dx$　(4) $\int_{-2}^0 (3x^3+x^2)dx-\int_2^0 (3x^3+x^2)dx$

$\boxed{4}$ 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-2}^2 (2x^3-x^2-3x+4)dx$　(2) $\int_0^1 (3x-1)^4dx$

$\boxed{5}$ 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-2}^4 (x+2)(x-4)dx$　(2) $\int_{-1-\sqrt{5}}^{-1+\sqrt{5}} (2x^2+4x-8)dx$

(3) $\int_1^2 (x-1)^3(x-2)dx$

$\boxed{6}$ すべての 2 次以下の整式 $f(x)=ax^2+bx+c$ に対して，$\int_{-k}^k f(x)dx=f(s)+f(t)$ が常に成り立つような定数 k，s，t の値を求めよ。ただし，$s<t$ とする。

$\boxed{7}$ 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(1) $f(x)=6x^2-x+\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$　　(2) $f(x)=\int_{0}^{1} xf(t)\,dt+\int_{0}^{1} tf(t)\,dt+1$

$\boxed{8}$ 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(1) $f(x)=x^2-1+\int_{0}^{1} tf(t)\,dt$　　(2) $f(x)=3x+\int_{0}^{1} (x+t)f(t)\,dt$

$\boxed{9}$ 次の等式を満たす関数 $f(x)$ および定数 a の値を求めよ。

(1) $\int_{a}^{x} f(t)\,dt=x^2-3x-4$　　(2) $\int_{x}^{a} f(t)\,dt=x^3-3x$

$\boxed{10}$ 関数 $f(x)=\int_{-2}^{x} (t^2+t-2)\,dt$ の極値を求めよ。

$\boxed{11}$ a を実数とする。定積分 $I=\int_{0}^{3} (x^2+2ax-a^2)\,dx$ の値が最大となるのは $a=$ ア$\boxed{}$ のときで，そのとき $I=$ イ$\boxed{}$ である。

数学演習（不定積分･定積分）Ｒ１．１０．２７　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1 次の不定積分を求めよ。ただし，(4) の x は t に無関係とする。

(1) $\displaystyle\int(4x^3+6x^2-2x+5)dx$　　(2) $\displaystyle\int(x+2)(1-3x)dx$

(3) $\displaystyle\int x(x-1)(x+2)dx-\int(x^2-1)(x+2)dx$　　(4) $\displaystyle\int(tx+1)(x+2t)dt$

解答　C は積分定数とする。

(1) $x^4+2x^3-x^2+5x+C$　　(2) $-x^3-\dfrac{5}{2}x^2+2x+C$

(3) $-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+2x+C$　　(4) $\dfrac{2}{3}xt^3+\dfrac{1}{2}(x^2+2)t^2+xt+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $$\int(4x^3+6x^2-2x+5)dx=4\int x^3dx+6\int x^2dx-2\int xdx+5\int dx$$
$$=4\cdot\frac{x^4}{4}+6\cdot\frac{x^3}{3}-2\cdot\frac{x^2}{2}+5\cdot x+C$$
$$=x^4+2x^3-x^2+5x+C$$

(2) $$\int(x+2)(1-3x)dx=\int(-3x^2-5x+2)dx$$
$$=-x^3-\frac{5}{2}x^2+2x+C$$

(3) $$\int x(x-1)(x+2)dx-\int(x^2-1)(x+2)dx=\int\{x(x-1)(x+2)-(x+1)(x-1)(x+2)\}dx$$
$$=\int(x-1)(x+2)\{x-(x+1)\}dx$$
$$=\int(-x^2-x+2)dx=-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x+C$$

(4) $$\int(tx+1)(x+2t)dt=\int\{2xt^2+(x^2+2)t+x\}dt$$
$$=\frac{2}{3}xt^3+\frac{1}{2}(x^2+2)t^2+xt+C$$

2 (1) $f'(x)=3x^2-2x$，$f(2)=0$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ が点 $(1,\ 0)$ を通り，更に点 $(x,\ f(x))$ における接線の傾きが x^2-1 であるとき，$f(x)$ を求めよ。

解答　(1) $f(x)=x^3-x^2-4$　　(2) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-x+\dfrac{2}{3}$

解説

(1) $f'(x)=3x^2-2x$ であるから

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-2x)dx=x^3-x^2+C\ \ (C\text{ は積分定数})$$

$f(2)=0$ であるから　$8-4+C=0$

これを解いて　$C=-4$

したがって　$f(x)=x^3-x^2-4$

(2) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(x,\ f(x))$ における接線の傾きは $f'(x)$ であるから

$f'(x)=x^2-1$

したがって　$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(x^2-1)dx$$
$$=\frac{x^3}{3}-x+C\ \ (C\text{ は積分定数})$$

また，曲線 $y=f(x)$ は，点 $(1,\ 0)$ を通るから　$f(1)=0$

ゆえに　$\dfrac{1}{3}-1+C=0$　　よって　$C=\dfrac{2}{3}$

したがって　$f(x)=\dfrac{x^3}{3}-x+\dfrac{2}{3}$

3 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^2(x^3-3x^2-1)dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^2(3t-1)(t+1)dt$

(3) $\displaystyle\int_1^4(x+1)^2dx-\int_1^4(x-1)^2dx$　　(4) $\displaystyle\int_{-2}^0(3x^3+x^2)dx-\int_2^0(3x^3+x^2)dx$

解答　(1) -6　　(2) 9　　(3) 30　　(4) $\dfrac{16}{3}$

解説

(1) $$\int_0^2(x^3-3x^2-1)dx=\left[\frac{x^4}{4}-x^3-x\right]_0^2=(4-8-2)-0=-6$$

(2) $$\int_{-1}^2(3t-1)(t+1)dt=\int_{-1}^2(3t^2+2t-1)dt=\Big[t^3+t^2-t\Big]_{-1}^2$$
$$=(8+4-2)-(-1+1+1)=10-1=9$$

(3) $$\int_1^4(x+1)^2dx-\int_1^4(x-1)^2dx=\int_1^4\{(x+1)^2-(x-1)^2\}dx$$
$$=\int_1^4 4xdx=4\int_1^4xdx=4\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^4=4\left(8-\frac{1}{2}\right)=30$$

(4) $$\int_{-2}^0(3x^3+x^2)dx-\int_2^0(3x^3+x^2)dx=\int_{-2}^0(3x^3+x^2)dx+\int_0^2(3x^3+x^2)dx$$
$$=\int_{-2}^2(3x^3+x^2)dx=\left[\frac{3}{4}x^4+\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^2$$
$$=\left(12+\frac{8}{3}\right)-\left(12-\frac{8}{3}\right)=\frac{8}{3}\cdot2=\frac{16}{3}$$

4 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-2}^2(2x^3-x^2-3x+4)dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1(3x-1)^4dx$

解答　(1) $\dfrac{32}{3}$　　(2) $\dfrac{11}{5}$

解説

(1) $$\int_{-2}^2(2x^3-x^2-3x+4)dx=2\int_0^2(-x^2+4)dx$$
$$=2\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_0^2$$
$$=2\left(-\frac{8}{3}+8\right)=\frac{32}{3}$$

(2) $$\int_0^1(3x-1)^4dx=\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-1)^5}{5}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{32-(-1)}{5}=\frac{11}{5}$$

5 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-2}^4(x+2)(x-4)dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1-\sqrt{5}}^{-1+\sqrt{5}}(2x^2+4x-8)dx$

(3) $\displaystyle\int_1^2(x-1)^3(x-2)dx$

解答　(1) -36　　(2) $-\dfrac{40\sqrt{5}}{3}$　　(3) $-\dfrac{1}{20}$

解説

(1) $$\int_{-2}^4(x+2)(x-4)dx=-\frac{1}{6}\{4-(-2)\}^3=-36$$

(2) $2x^2+4x-8=0$ を解くと　$x=-1\pm\sqrt{5}$

$\alpha=-1-\sqrt{5}$，$\beta=-1+\sqrt{5}$ とおくと，求める定積分は

$$\int_\alpha^\beta2(x-\alpha)(x-\beta)dx=2\cdot\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}=-\frac{1}{3}(2\sqrt{5})^3=-\frac{40\sqrt{5}}{3}$$

(3) $$\int_1^2(x-1)^3(x-2)dx=\int_1^2(x-1)^3\{(x-1)-1\}dx=\int_1^2\{(x-1)^4-(x-1)^3\}dx$$
$$=\left[\frac{(x-1)^5}{5}-\frac{(x-1)^4}{4}\right]_1^2=\frac{1}{5}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{20}$$

6 すべての 2 次以下の整式 $f(x)=ax^2+bx+c$ に対して，$\displaystyle\int_{-k}^kf(x)dx=f(s)+f(t)$ が常に成り立つような定数 k，s，t の値を求めよ。ただし，$s<t$ とする。

解答　$k=1$，$s=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

解説

$$\int_{-k}^kf(x)dx=\int_{-k}^k(ax^2+bx+c)dx=2\int_0^k(ax^2+c)dx$$
$$=2\left[\frac{a}{3}x^3+cx\right]_0^k=\frac{2}{3}ak^3+2ck$$

$f(s)+f(t)=a(s^2+t^2)+b(s+t)+2c$

$\displaystyle\int_{-k}^kf(x)dx=f(s)+f(t)$ が常に成り立つとき，

$$\frac{2}{3}ak^3+2ck=a(s^2+t^2)+b(s+t)+2c\quad\cdots\cdots\text{[A]}$$

がすべての 2 次以下の整式 $f(x)=ax^2+bx+c$ に対して成り立つことから，[A] は a，b，c についての恒等式である。

両辺の係数を比較して

$\dfrac{2}{3}k^3=s^2+t^2$ ……①，　$0=s+t$ ……②，　$2k=2$ ……③

③ から　$k=1$　　② から　$s=-t$ ……④

ゆえに，① から　$\dfrac{2}{3}=2t^2$　　よって　$t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

④ と $s<t$ から　$s=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

7 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(1) $f(x)=6x^2-x+\displaystyle\int_{-1}^1f(t)dt$　　(2) $f(x)=\displaystyle\int_0^1xf(t)dt+\int_0^1tf(t)dt+1$

解答　(1)　$f(x)=6x^2-x-4$　　(2)　$f(x)=-12x-6$

解説

(1)　$\int_{-1}^{1}f(t)\,dt=a$ とおくと　　$f(x)=6x^2-x+a$

ゆえに　$\int_{-1}^{1}f(t)\,dt=\int_{-1}^{1}(6t^2-t+a)dt=2\int_{0}^{1}(6t^2+a)dt$

$=2\Big[2t^3+at\Big]_0^1=2(2+a)$

よって　$a=2(2+a)$　　ゆえに　$a=-4$

したがって　$f(x)=6x^2-x-4$

(2)　x は積分変数 t に無関係であるから　$\int_0^1 xf(t)\,dt=x\int_0^1 f(t)\,dt$

$\int_0^1 f(t)\,dt=a$，$\int_0^1 tf(t)\,dt=b$ とおくと　　$f(x)=ax+b+1$

ゆえに　$\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1(at+b+1)dt=\left[\frac{a}{2}t^2+(b+1)t\right]_0^1=\frac{a}{2}+b+1$

$\int_0^1 tf(t)\,dt=\int_0^1 t(at+b+1)dt=\int_0^1\{at^2+(b+1)t\}dt$

$=\left[\frac{a}{3}t^3+\frac{b+1}{2}t^2\right]_0^1=\frac{a}{3}+\frac{b+1}{2}$

よって　$\frac{a}{2}+b+1=a$，$\frac{a}{3}+\frac{b+1}{2}=b$

ゆえに　$a-2b=2$，$2a-3b=-3$

これを解いて　$a=-12$，$b=-7$

したがって　$f(x)=-12x-6$

8　次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(1)　$f(x)=x^2-1+\int_0^1 tf(t)\,dt$　　　(2)　$f(x)=3x+\int_0^1(x+t)f(t)\,dt$

解答　(1)　$f(x)=x^2-\frac{3}{2}$　　(2)　$f(x)=-18x-12$

解説

(1)　$\int_0^1 tf(t)\,dt=a$ とおくと　　$f(x)=x^2-1+a$

ゆえに　$\int_0^1 tf(t)\,dt=\int_0^1 t(t^2-1+a)dt=\int_0^1\{t^3+(a-1)t\}dt$

$=\left[\frac{t^4}{4}+\frac{a-1}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{4}+\frac{a-1}{2}$

よって　$a=\frac{1}{4}+\frac{a-1}{2}$　　ゆえに　$a=-\frac{1}{2}$

したがって　$f(x)=x^2-\frac{3}{2}$

(2)　等式から　　$f(x)=3x+x\int_0^1 f(t)\,dt+\int_0^1 tf(t)\,dt$

$\int_0^1 f(t)\,dt=a$，$\int_0^1 tf(t)\,dt=b$ とおくと　　$f(x)=(a+3)x+b$

$\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1\{(a+3)t+b\}dt=\left[\frac{1}{2}(a+3)t^2+bt\right]_0^1=\frac{1}{2}(a+3)+b$

$\int_0^1 tf(t)\,dt=\int_0^1\{(a+3)t^2+bt\}dt=\left[\frac{1}{3}(a+3)t^3+\frac{1}{2}bt^2\right]_0^1=\frac{1}{3}(a+3)+\frac{1}{2}b$

よって　$\frac{1}{2}(a+3)+b=a$，　$\frac{1}{3}(a+3)+\frac{1}{2}b=b$

ゆえに　$a-2b=3$，$2a-3b=-6$

これを解いて　$a=-21$，$b=-12$

したがって　$f(x)=-18x-12$

9　次の等式を満たす関数 $f(x)$ および定数 a の値を求めよ。

(1)　$\int_a^x f(t)\,dt=x^2-3x-4$　　　(2)　$\int_x^a f(t)\,dt=x^3-3x$

解答　(1)　$f(x)=2x-3$；$a=-1$，4

(2)　$f(x)=-3x^2+3$；$a=0$，$\pm\sqrt{3}$

解説

(1)　$\int_a^x f(t)\,dt=x^2-3x-4$ …… ①　とする。

① の両辺を x で微分すると　　$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=2x-3$

すなわち　$f(x)=2x-3$

また，① で $x=a$ とおくと，左辺は 0 になるから　　$0=a^2-3a-4$

よって　$(a+1)(a-4)=0$　　ゆえに　$a=-1$，4

したがって　$f(x)=2x-3$；$a=-1$，4

(2)　$\int_x^a f(t)\,dt=x^3-3x$ から　　$\int_a^x f(t)\,dt=-x^3+3x$　…… ②

② の両辺を x で微分すると　　$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=-3x^2+3$

すなわち　$f(x)=-3x^2+3$

また，② で $x=a$ とおくと，左辺は 0 になるから　　$0=-a^3+3a$

ゆえに　$a(a^2-3)=0$　　よって　$a=0$，$\pm\sqrt{3}$

したがって　$f(x)=-3x^2+3$；$a=0$，$\pm\sqrt{3}$

10　関数 $f(x)=\int_{-2}^{x}(t^2+t-2)dt$ の極値を求めよ。

解答　$x=-2$ で極大値 0，$x=1$ で極小値 $-\frac{9}{2}$

解説

$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_{-2}^{x}(t^2+t-2)dt=x^2+x-2=(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$ とすると　　$(x+2)(x-1)=0$

よって　$x=-2$，1

ゆえに，$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	…	-2	…	1	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

ここで　$f(x)=\int_{-2}^{x}(t^2+t-2)dt$

$=\left[\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}-2t\right]_{-2}^{x}$

$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x-\frac{10}{3}$

ゆえに　$f(-2)=\frac{(-2)^3}{3}+\frac{(-2)^2}{2}-2\cdot(-2)-\frac{10}{3}=0$

$f(1)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\cdot1-\frac{10}{3}=-\frac{9}{2}$

よって，$x=-2$ で極大値 0，$x=1$ で極小値 $-\frac{9}{2}$ をとる。

別解　[極値の計算]

$f(-2)=\int_{-2}^{-2}(t^2+t-2)dt=0$

$f(1)=\int_{-2}^{1}(t+2)(t-1)dt=-\frac{1}{6}(1+2)^3=-\frac{9}{2}$

よって，$x=-2$ で極大値 0，$x=1$ で極小値 $-\frac{9}{2}$ をとる。

11　a を実数とする。定積分 $I=\int_0^3(x^2+2ax-a^2)dx$ の値が最大となるのは $a=$ ア $\boxed{}$ のときで，そのとき $I=$ イ $\boxed{}$ である。

解答　(ア)　$\frac{3}{2}$　　(イ)　$\frac{63}{4}$

解説

$I=\int_0^3(x^2+2ax-a^2)dx=\left[\frac{x^3}{3}+ax^2-a^2x\right]_0^3=9+9a-3a^2$

$=-3a^2+9a+9=-3\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{63}{4}$

よって，I は $a=$ ア $\frac{3}{2}$ のとき最大となり，そのとき　　$I=$ イ $\frac{63}{4}$