数学演習（不定積分と定積分）Ｈ２２．１１．１９　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

１．次の不定積分を求めよ。

(1) $\int(-3)dx$　(2) $\int(4x-1)dx$　(3) $\int 3(x+2)dx$

(4) $\int(3x^2-2)dx$　(5) $\int(t^2+2t)dt$　(6) $\int(6x^2-2x+5)dx$

２．次の不定積分を求めよ。

(1) $\int(x+1)(x-3)dx$　(2) $\int(2t+1)(3t-2)dt$

(3) $\int(x-4)^2dx$　(4) $\int(3y+2)^2dy$

３．次の不定積分を求めよ。

(1) $\int(x^2-6x+4)dx$　(2) $\int(2t+1)(t-3)dt$

(3) $\int(x+2)^3dx-\int(x-2)^3dx$

４．次の条件を満たす関数 $F(x)$ を求めよ。

(1) $F'(x)=4x-4$，$F(1)=1$　(2) $F'(x)=3(x+1)(x-2)$，$F(0)=1$

５．点 $(1,\ -1)$ を通る曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(x,\ y)$ における接線の傾きが $3(x^2-1)$ であるとき，$f(x)$ を求めよ。

６．次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^3(-2)dx$　(2) $\int_2^4(x-3)dx$　(3) $\int_2^3(3x^2-5)dx$

(4) $\int_0^1(x^2-2x-3)dx$　(5) $\int_{-1}^3 6(x+2)(x-1)dx$　(6) $\int_{-2}^2(x+2)^2dx$

7．次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{1}^{3}(t^2-3t-4)dt$　　(2) $\int_{0}^{3}(5s^2-2s+1)ds$

8．次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-2}^{4}(2x+1)dx+\int_{-2}^{4}(3x^2-x)dx$　　(2) $\int_{2}^{0}(x^2+1)dx$

(3) $\int_{0}^{1}(x^2-2x)dx+\int_{1}^{3}(x^2-2x)dx$　　(4) $\int_{-2}^{4}3x^2dx-\int_{1}^{4}3x^2dx$

9．次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-1}^{2}(4x^2-x+3)dx$　　(2) $\int_{-1}^{2}(2x^2+3x)dx-\int_{-1}^{2}x(2x+1)dx$

(3) $\int_{-3}^{3}(3x^2-4x)dx-\int_{4}^{3}x(3x-4)dx$

10. 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{0}^{1}(x^3+1)dx$　　(2) $\int_{-2}^{1}(4x^3-2x)dx$

(3) $\int_{-2}^{2}(2x^3-3x^2-x+5)dx$　　(4) $\int_{-2}^{3}(x+2)^2(x-3)dx$

11. (1) $\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ が成り立つことを証明せよ。

(2) (1) の結果を利用して，定積分 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x^2-3x+1)dx$ を計算せよ。

12. 等式 $\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を利用して，次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-3}^{2}(x-2)(x+3)dx$　　(2) $\int_{-2}^{1}(x^2+x-2)dx$

(3) $\int_{2-\sqrt{2}}^{2+\sqrt{2}}(x^2-4x+2)dx$

数学演習（不定積分と定積分）Ｈ２２．１１．１９　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　）

1．次の不定積分を求めよ。

(1) $\int(-3)dx$　(2) $\int(4x-1)dx$　(3) $\int 3(x+2)dx$

(4) $\int(3x^2-2)dx$　(5) $\int(t^2+2t)dt$　(6) $\int(6x^2-2x+5)dx$

解答　C は積分定数とする。

(1) $-3x+C$　(2) $2x^2-x+C$　(3) $\dfrac{3}{2}x^2+6x+C$　(4) x^3-2x+C

(5) $\dfrac{t^3}{3}+t^2+C$　(6) $2x^3-x^2+5x+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) (与式) $=-3\cdot x+C=-3x+C$

(2) (与式) $=4\cdot\dfrac{x^2}{2}-x+C=2x^2-x+C$

(3) (与式) $=\int(3x+6)dx=3\cdot\dfrac{x^2}{2}+6\cdot x+C=\dfrac{3}{2}x^2+6x+C$

(4) (与式) $=3\cdot\dfrac{x^3}{3}-2\cdot x+C=x^3-2x+C$

(5) (与式) $=\dfrac{t^3}{3}+2\cdot\dfrac{t^2}{2}+C=\dfrac{t^3}{3}+t^2+C$

(6) (与式) $=6\cdot\dfrac{x^3}{3}-2\cdot\dfrac{x^2}{2}+5\cdot x+C=2x^3-x^2+5x+C$

2．次の不定積分を求めよ。

(1) $\int(x+1)(x-3)dx$　(2) $\int(2t+1)(3t-2)dt$

(3) $\int(x-4)^2dx$　(4) $\int(3y+2)^2dy$

解答　C は積分定数とする。

(1) $\dfrac{x^3}{3}-x^2-3x+C$　(2) $2t^3-\dfrac{t^2}{2}-2t+C$　(3) $\dfrac{x^3}{3}-4x^2+16x+C$

(4) $3y^3+6y^2+4y+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) (与式) $=\int(x^2-2x-3)dx=\dfrac{x^3}{3}-2\cdot\dfrac{x^2}{2}-3\cdot x+C=\dfrac{x^3}{3}-x^2-3x+C$

(2) (与式) $=\int(6t^2-t-2)dt=6\cdot\dfrac{t^3}{3}-\dfrac{t^2}{2}-2\cdot t+C=2t^3-\dfrac{t^2}{2}-2t+C$

(3) (与式) $=\int(x^2-8x+16)dx=\dfrac{x^3}{3}-8\cdot\dfrac{x^2}{2}+16\cdot x+C=\dfrac{x^3}{3}-4x^2+16x+C$

(4) (与式) $=\int(9y^2+12y+4)dy=9\cdot\dfrac{y^3}{3}+12\cdot\dfrac{y^2}{2}+4\cdot y+C=3y^3+6y^2+4y+C$

3．次の不定積分を求めよ。

(1) $\int(x^2-6x+4)dx$　(2) $\int(2t+1)(t-3)dt$

(3) $\int(x+2)^3dx-\int(x-2)^3dx$

解答　(1) $\dfrac{x^3}{3}-3x^2+4x+C$ （C は積分定数）

(2) $\dfrac{2}{3}t^3-\dfrac{5}{2}t^2-3t+C$ （C は積分定数）　(3) $4x^3+16x+C$ （C は積分定数）

解説

(1) $\int(x^2-6x+4)dx=\int x^2dx-6\int xdx+4\int dx$

$=\dfrac{x^3}{3}-3x^2+4x+C$ （C は積分定数）

(2) $\int(2t+1)(t-3)dt=\int(2t^2-5t-3)dt=\dfrac{2}{3}t^3-\dfrac{5}{2}t^2-3t+C$ （C は積分定数）

(3) $\int(x+2)^3dx-\int(x-2)^3dx=\int\{(x+2)^3-(x-2)^3\}dx=\int(12x^2+16)dx$

$=4x^3+16x+C$ （C は積分定数）

4．次の条件を満たす関数 $F(x)$ を求めよ。

(1) $F'(x)=4x-4$，$F(1)=1$　(2) $F'(x)=3(x+1)(x-2)$，$F(0)=1$

解答　(1) $F(x)=2x^2-4x+3$　(2) $F(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x+1$

解説

(1) $F'(x)=4x-4$ であるから

$F(x)=\int(4x-4)dx=2x^2-4x+C$ （C は積分定数）

$F(1)=1$ から　$2\cdot1^2-4\cdot1+C=1$

すなわち　$-2+C=1$　ゆえに　$C=3$

よって　$F(x)=2x^2-4x+3$

(2) $F'(x)=3(x+1)(x-2)$ であるから

$F(x)=\int3(x+1)(x-2)dx=\int(3x^2-3x-6)dx$

$=x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x+C$ （C は積分定数）

$F(0)=1$ から　$C=1$

よって　$F(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x+1$

5．点 $(1,\ -1)$ を通る曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(x,\ y)$ における接線の傾きが $3(x^2-1)$ であるとき，$f(x)$ を求めよ。

解答　$f(x)=x^3-3x+1$

解説

条件から　$f'(x)=3(x^2-1)$

ゆえに　$f(x)=\int3(x^2-1)dx=\int(3x^2-3)dx=x^3-3x+C$ （C は積分定数）

この曲線は点 $(1,\ -1)$ を通るから　$f(1)=-1$　すなわち　$1^3-3\cdot1+C=-1$

よって　$C=1$

したがって　$f(x)=x^3-3x+1$

6．次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^3(-2)dx$　(2) $\int_2^4(x-3)dx$　(3) $\int_2^3(3x^2-5)dx$

(4) $\int_0^1(x^2-2x-3)dx$　(5) $\int_{-1}^3 6(x+2)(x-1)dx$　(6) $\int_{-2}^2(x+2)^2dx$

解答　(1) -6　(2) 0　(3) 14　(4) $-\dfrac{11}{3}$　(5) 32　(6) $\dfrac{64}{3}$

解説

(1) (与式) $=\Big[-2x\Big]_0^3=-2\cdot3=-6$

(2) (与式) $=\Big[\dfrac{x^2}{2}-3x\Big]_2^4=(8-12)-(2-6)=0$

(3) (与式) $=\Big[x^3-5x\Big]_2^3=(27-15)-(8-10)=14$

(4) (与式) $=\Big[\dfrac{x^3}{3}-x^2-3x\Big]_0^1=\dfrac{1}{3}-1-3=-\dfrac{11}{3}$

(5) (与式) $=\int_{-1}^3(6x^2+6x-12)dx=\Big[2x^3+3x^2-12x\Big]_{-1}^3$

$=(54+27-36)-(-2+3+12)=32$

(6) (与式) $=\int_{-2}^2(x^2+4x+4)dx=\Big[\dfrac{x^3}{3}+2x^2+4x\Big]_{-2}^2$

$=\Big(\dfrac{8}{3}+8+8\Big)-\Big(-\dfrac{8}{3}+8-8\Big)=\dfrac{64}{3}$

別解　(与式) $=2\int_0^2(x^2+4)dx=2\Big[\dfrac{x^3}{3}+4x\Big]_0^2=2\Big(\dfrac{8}{3}+8\Big)=\dfrac{64}{3}$

参考　n が 0 以上の整数のとき　$\int_{-a}^a x^{2n}dx=2\int_0^a x^{2n}dx$，$\int_{-a}^a x^{2n+1}dx=0$

7．次の定積分を求めよ。

(1) $\int_1^3(t^2-3t-4)dt$　(2) $\int_0^3(5s^2-2s+1)ds$

解答　(1) $-\dfrac{34}{3}$　(2) 39

解説

(1) (与式) $=\Big[\dfrac{t^3}{3}-\dfrac{3}{2}t^2-4t\Big]_1^3=\Big(9-\dfrac{27}{2}-12\Big)-\Big(\dfrac{1}{3}-\dfrac{3}{2}-4\Big)=-\dfrac{34}{3}$

(2) (与式) $=\Big[\dfrac{5}{3}s^3-s^2+s\Big]_0^3=\dfrac{5}{3}\cdot27-9+3=39$

8．次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{4}(2x+1)dx+\int_{-2}^{4}(3x^2-x)dx$　　(2) $\displaystyle\int_{2}^{0}(x^2+1)dx$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{1}(x^2-2x)dx+\int_{1}^{3}(x^2-2x)dx$　　(4) $\displaystyle\int_{-2}^{4}3x^2dx-\int_{1}^{4}3x^2dx$

解答　(1) 84　(2) $-\dfrac{14}{3}$　(3) 0　(4) 9

解説

(1) (与式)$\displaystyle=\int_{-2}^{4}\{(2x+1)+(3x^2-x)\}dx=\int_{-2}^{4}(3x^2+x+1)dx=\left[x^3+\frac{x^2}{2}+x\right]_{-2}^{4}$

$=(64+8+4)-(-8+2-2)=84$

(2) (与式)$\displaystyle=-\int_{0}^{2}(x^2+1)dx=-\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{0}^{2}=-\left(\frac{8}{3}+2\right)=-\frac{14}{3}$

(3) (与式)$\displaystyle=\int_{0}^{3}(x^2-2x)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{0}^{3}=\frac{27}{3}-9=0$

(4) (与式)$\displaystyle=\int_{-2}^{4}3x^2dx+\int_{4}^{1}3x^2dx=\int_{-2}^{1}3x^2dx=\left[x^3\right]_{-2}^{1}=1-(-8)=9$

9．次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(4x^2-x+3)dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(2x^2+3x)dx-\int_{-1}^{2}x(2x+1)dx$

(3) $\displaystyle\int_{-3}^{3}(3x^2-4x)dx-\int_{4}^{3}x(3x-4)dx$

解答　(1) $\dfrac{39}{2}$　(2) 3　(3) 77

解説

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(4x^2-x+3)dx=4\int_{-1}^{2}x^2dx-\int_{-1}^{2}xdx+3\int_{-1}^{2}dx$

$\displaystyle=4\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2}+3\left[x\right]_{-1}^{2}$

$\displaystyle=4\left(\frac{8}{3}+\frac{1}{3}\right)-\left(2-\frac{1}{2}\right)+3(2+1)=\frac{39}{2}$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(2x^2+3x)dx-\int_{-1}^{2}x(2x+1)dx=\int_{-1}^{2}\{(2x^2+3x)-(2x^2+x)\}dx$

$\displaystyle=\int_{-1}^{2}2xdx=\left[x^2\right]_{-1}^{2}=4-1=3$

(3) $\displaystyle\int_{-3}^{3}(3x^2-4x)dx-\int_{4}^{3}x(3x-4)dx=\int_{-3}^{3}(3x^2-4x)dx+\int_{3}^{4}(3x^2-4x)dx$

$\displaystyle=\int_{-3}^{4}(3x^2-4x)dx=\left[x^3-2x^2\right]_{-3}^{4}$

$=(64-32)-(-27-18)=77$

10．次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{0}^{1}(x^3+1)dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-2}^{1}(4x^3-2x)dx$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(2x^3-3x^2-x+5)dx$　　(4) $\displaystyle\int_{-2}^{3}(x+2)^2(x-3)dx$

解答　(1) $\dfrac{5}{4}$　(2) -12　(3) 4　(4) $-\dfrac{625}{12}$

解説

(1) (与式)$\displaystyle=\left[\frac{x^4}{4}+x\right]_{0}^{1}=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$

(2) (与式)$\displaystyle=\left[x^4-x^2\right]_{-2}^{1}=(1-1)-(16-4)=-12$

(3) (与式)$\displaystyle=\left[\frac{x^4}{2}-x^3-\frac{x^2}{2}+5x\right]_{-2}^{2}=(8-8-2+10)-\{8-(-8)-2-10\}=4$

別解　(与式)$\displaystyle=2\int_{0}^{2}(-3x^2+5)dx=2\left[-x^3+5x\right]_{0}^{2}=2(-8+10)=4$

(4) (与式)$\displaystyle=\int_{-2}^{3}(x^3+x^2-8x-12)dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-4x^2-12x\right]_{-2}^{3}$

$\displaystyle=\left(\frac{81}{4}+9-36-36\right)-\left\{4-\frac{8}{3}-16-(-24)\right\}=\frac{81}{4}+\frac{8}{3}-75=-\frac{625}{12}$

11．(1) $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ が成り立つことを証明せよ。

(2) (1) の結果を利用して，定積分 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x^2-3x+1)dx$ を計算せよ。

解答　(1) 略　(2) $-\dfrac{1}{24}$

解説

(1) $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=\int_{\alpha}^{\beta}\{(x-\alpha)^2+(\alpha-\beta)(x-\alpha)\}dx$

$\displaystyle=\left[\frac{(x-\alpha)^3}{3}+\frac{\alpha-\beta}{2}(x-\alpha)^2\right]_{\alpha}^{\beta}$

$\displaystyle=\frac{(\beta-\alpha)^3}{3}-\frac{(\beta-\alpha)^3}{2}=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

(2) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x^2-3x+1)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x-1)(x-1)dx=2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)dx$

$\displaystyle=2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{1}{24}$

12．等式 $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を利用して，次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-3}^{2}(x-2)(x+3)dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-2}^{1}(x^2+x-2)dx$

(3) $\displaystyle\int_{2-\sqrt{2}}^{2+\sqrt{2}}(x^2-4x+2)dx$

解答　(1) $-\dfrac{125}{6}$　(2) $-\dfrac{9}{2}$　(3) $-\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

解説

(1) (与式)$\displaystyle=\int_{-3}^{2}(x+3)(x-2)dx=-\frac{1}{6}\{2-(-3)\}^3=-\frac{1}{6}\cdot5^3=-\frac{125}{6}$

(2) (与式)$\displaystyle=\int_{-2}^{1}(x+2)(x-1)dx=-\frac{1}{6}\{1-(-2)\}^3=-\frac{1}{6}\cdot3^3=-\frac{9}{2}$

(3) $x^2-4x+2=0$ の解は　$x=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot2}=2\pm\sqrt{2}$

したがって　(与式)$\displaystyle=\int_{2-\sqrt{2}}^{2+\sqrt{2}}\{x-(2-\sqrt{2})\}\{x-(2+\sqrt{2})\}dx$

$\displaystyle=-\frac{1}{6}\{(2+\sqrt{2})-(2-\sqrt{2})\}^3=-\frac{1}{6}\cdot(2\sqrt{2})^3=-\frac{8\sqrt{2}}{3}$

参考　$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=\int_{\alpha}^{\beta}\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{\alpha+\beta}{2}x^2+\alpha\beta x\right]_{\alpha}^{\beta}$

$\displaystyle=\left\{\frac{\beta^3}{3}-\frac{(\alpha+\beta)\beta^2}{2}+\alpha\beta^2\right\}-\left\{\frac{\alpha^3}{3}-\frac{(\alpha+\beta)\alpha^2}{2}+\alpha^2\beta\right\}$

$\displaystyle=\frac{\beta^3-\alpha^3}{3}-\frac{(\alpha+\beta)(\beta^2-\alpha^2)}{2}+\alpha\beta(\beta-\alpha)$

$\displaystyle=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)\times\{2(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)-3(\beta^2+2\beta\alpha+\alpha^2)+6\alpha\beta\}$

$\displaystyle=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)\{-(\beta-\alpha)^2\}=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$