数学演習（不定積分と定積分）Ｈ２４．６．２０　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１．次の不定積分を求めよ。

(1) $\int(-3)dx$　(2) $\int(4x-1)dx$　(3) $\int 3(x+2)dx$

(4) $\int(3x^2-2)dx$　(5) $\int(t^2+2t)dt$　(6) $\int(6x^2-2x+5)dx$

２．次の不定積分を求めよ。

(1) $\int(x+1)(x-3)dx$　(2) $\int(2t+1)(3t-2)dt$

(3) $\int(x-4)^2dx$　(4) $\int(3y+2)^2dy$

３．次の不定積分を求めよ。ただし，(4) の x は t に無関係とする。

(1) $\int(x^2-4x+2)dx$　(2) $\int(2t-1)(t+3)dt$

(3) $\int(x-1)^3dx-\int(x+1)^3dx$　(4) $\int(t-x)(2t+x)dt$

４．次の条件を満たす関数 $F(x)$ を求めよ。

(1) $F'(x)=4x-4$，$F(1)=1$　(2) $F'(x)=3(x+1)(x-2)$，$F(0)=1$

５．次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^3(-2)dx$　(2) $\int_2^4(x-3)dx$　(3) $\int_2^3(3x^2-5)dx$

(4) $\int_0^1(x^2-2x-3)dx$　(5) $\int_{-1}^3 6(x+2)(x-1)dx$　(6) $\int_{-2}^2(x+2)^2dx$

６. 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-2}^{4}(2x+1)dx+\int_{-2}^{4}(3x^2-x)dx$　(2) $\int_{2}^{0}(x^2+1)dx$

(3) $\int_{0}^{1}(x^2-2x)dx+\int_{1}^{3}(x^2-2x)dx$　(4) $\int_{-2}^{4}3x^2dx-\int_{1}^{4}3x^2dx$

７. $f(x)=ax^2+bx+c$ が $f(1)=2$，$f'(0)=-2$，$\int_{0}^{1}f(x)\,dx=1$ を満たすとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

８. 等式 $\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を利用して，次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-3}^{2}(x-2)(x+3)dx$　(2) $\int_{-2}^{1}(x^2+x-2)dx$

(3) $\int_{2-\sqrt{2}}^{2+\sqrt{2}}(x^2-4x+2)dx$

数学演習（不定積分と定積分）Ｈ２４．６．２０

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　　　　　　)

1．次の不定積分を求めよ。

(1) $\int(-3)dx$　(2) $\int(4x-1)dx$　(3) $\int 3(x+2)dx$

(4) $\int(3x^2-2)dx$　(5) $\int(t^2+2t)dt$　(6) $\int(6x^2-2x+5)dx$

解答　C は積分定数とする。

(1) $-3x+C$　(2) $2x^2-x+C$　(3) $\frac{3}{2}x^2+6x+C$　(4) x^3-2x+C

(5) $\frac{t^3}{3}+t^2+C$　(6) $2x^3-x^2+5x+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) (与式)$=-3\cdot x+C=-3x+C$

(2) (与式)$=4\cdot\frac{x^2}{2}-x+C=2x^2-x+C$

(3) (与式)$=\int(3x+6)dx=3\cdot\frac{x^2}{2}+6\cdot x+C=\frac{3}{2}x^2+6x+C$

(4) (与式)$=3\cdot\frac{x^3}{3}-2\cdot x+C=x^3-2x+C$

(5) (与式)$=\frac{t^3}{3}+2\cdot\frac{t^2}{2}+C=\frac{t^3}{3}+t^2+C$

(6) (与式)$=6\cdot\frac{x^3}{3}-2\cdot\frac{x^2}{2}+5\cdot x+C=2x^3-x^2+5x+C$

2．次の不定積分を求めよ。

(1) $\int(x+1)(x-3)dx$　(2) $\int(2t+1)(3t-2)dt$

(3) $\int(x-4)^2dx$　(4) $\int(3y+2)^2dy$

解答　C は積分定数とする。

(1) $\frac{x^3}{3}-x^2-3x+C$　(2) $2t^3-\frac{t^2}{2}-2t+C$　(3) $\frac{x^3}{3}-4x^2+16x+C$

(4) $3y^3+6y^2+4y+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) (与式)$=\int(x^2-2x-3)dx=\frac{x^3}{3}-2\cdot\frac{x^2}{2}-3\cdot x+C=\frac{x^3}{3}-x^2-3x+C$

(2) (与式)$=\int(6t^2-t-2)dt=6\cdot\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}-2\cdot t+C=2t^3-\frac{t^2}{2}-2t+C$

(3) (与式)$=\int(x^2-8x+16)dx=\frac{x^3}{3}-8\cdot\frac{x^2}{2}+16\cdot x+C=\frac{x^3}{3}-4x^2+16x+C$

(4) (与式)$=\int(9y^2+12y+4)dy=9\cdot\frac{y^3}{3}+12\cdot\frac{y^2}{2}+4\cdot y+C=3y^3+6y^2+4y+C$

3．次の不定積分を求めよ。ただし，(4) の x は t に無関係とする。

(1) $\int(x^2-4x+2)dx$　(2) $\int(2t-1)(t+3)dt$

(3) $\int(x-1)^3dx-\int(x+1)^3dx$　(4) $\int(t-x)(2t+x)dt$

解答　C は積分定数とする。

(1) $\frac{x^3}{3}-2x^2+2x+C$　(2) $\frac{2}{3}t^3+\frac{5}{2}t^2-3t+C$　(3) $-2x^3-2x+C$

(4) $\frac{2}{3}t^3-\frac{1}{2}xt^2-x^2t+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\int(x^2-4x+2)dx=\frac{x^3}{3}-2x^2+2x+C$

(2) $\int(2t-1)(t+3)dt=\int(2t^2+5t-3)dt=\frac{2}{3}t^3+\frac{5}{2}t^2-3t+C$

(3) $\int(x-1)^3dx-\int(x+1)^3dx$

$=\int\{(x-1)^3-(x+1)^3\}dx$　（公式より）

$=\int(-6x^2-2)dx=-2x^3-2x+C$

(4) $\int(t-x)(2t+x)dt=\int(2t^2-xt-x^2)dt=2\int t^2dt-x\int tdt-x^2\int dt$

$=\frac{2}{3}t^3-\frac{1}{2}xt^2-x^2t+C$

参考　xはtに無関係なので、インテグラルの外に出せる

4．次の条件を満たす関数 $F(x)$ を求めよ。

(1) $F'(x)=4x-4$，$F(1)=1$　(2) $F'(x)=3(x+1)(x-2)$，$F(0)=1$

解答　(1) $F(x)=2x^2-4x+3$　(2) $F(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+1$

解説

(1) $F'(x)=4x-4$ であるから

$F(x)=\int(4x-4)dx=2x^2-4x+C$　(C は積分定数)

$F(1)=1$ から　$2\cdot1^2-4\cdot1+C=1$

すなわち　$-2+C=1$　ゆえに　$C=3$

よって　$F(x)=2x^2-4x+3$

(2) $F'(x)=3(x+1)(x-2)$ であるから

$F(x)=\int3(x+1)(x-2)dx=\int(3x^2-3x-6)dx$

$=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+C$　(C は積分定数)

$F(0)=1$ から　$C=1$

よって　$F(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+1$

5．次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^3(-2)dx$　(2) $\int_2^4(x-3)dx$　(3) $\int_2^3(3x^2-5)dx$

(4) $\int_0^1(x^2-2x-3)dx$　(5) $\int_{-1}^3 6(x+2)(x-1)dx$　(6) $\int_{-2}^2(x+2)^2dx$

解答　(1) -6　(2) 0　(3) 14　(4) $-\frac{11}{3}$　(5) 32　(6) $\frac{64}{3}$

解説

(1) (与式)$=\Big[-2x\Big]_0^3=-2\cdot3=-6$

(2) (与式)$=\Big[\frac{x^2}{2}-3x\Big]_2^4=(8-12)-(2-6)=0$

(3) (与式)$=\Big[x^3-5x\Big]_2^3=(27-15)-(8-10)=14$

(4) (与式)$=\Big[\frac{x^3}{3}-x^2-3x\Big]_0^1=\frac{1}{3}-1-3=-\frac{11}{3}$

(5) (与式)$=\int_{-1}^3(6x^2+6x-12)dx=\Big[2x^3+3x^2-12x\Big]_{-1}^3$

$=(54+27-36)-(-2+3+12)=32$

(6) (与式)$=\int_{-2}^2(x^2+4x+4)dx=\Big[\frac{x^3}{3}+2x^2+4x\Big]_{-2}^2$

$=\left(\frac{8}{3}+8+8\right)-\left(-\frac{8}{3}+8-8\right)=\frac{64}{3}$

6．次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-2}^{4}(2x+1)dx+\int_{-2}^{4}(3x^2-x)dx$ (2) $\int_{2}^{0}(x^2+1)dx$

(3) $\int_{0}^{1}(x^2-2x)dx+\int_{1}^{3}(x^2-2x)dx$ (4) $\int_{-2}^{4}3x^2dx-\int_{1}^{4}3x^2dx$

解答 (1) 84 (2) $-\frac{14}{3}$ (3) 0 (4) 9

解説

(1) $(与式)=\int_{-2}^{4}\{(2x+1)+(3x^2-x)\}dx$ （公式より）

$=\int_{-2}^{4}(3x^2+x+1)dx=\left[x^3+\frac{x^2}{2}+x\right]_{-2}^{4}$

$=(64+8+4)-(-8+2-2)=84$

(2) $(与式)=-\int_{0}^{2}(x^2+1)dx$

$=-\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{0}^{2}=-\left(\frac{8}{3}+2\right)=-\frac{14}{3}$

(3) $(与式)=\int_{0}^{3}(x^2-2x)dx$ （公式より）

$=\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{0}^{3}=\frac{27}{3}-9=0$

(4) $(与式)=\int_{-2}^{4}3x^2dx+\int_{4}^{1}3x^2dx$ （公式）

$=\int_{-2}^{1}3x^2dx=\left[x^3\right]_{-2}^{1}$ （さらに公式）

$=1-(-8)=9$

参考 （公式）

$\int_{a}^{a}f(x)dx=0$ $\int_{b}^{a}f(x)dx=-\int_{a}^{b}f(x)dx$ $\int_{a}^{b}f(x)dx=\int_{a}^{c}f(x)dx+\int_{c}^{b}f(x)dx$

7．$f(x)=ax^2+bx+c$ が $f(1)=2$，$f'(0)=-2$，$\int_{0}^{1}f(x)dx=1$ を満たすとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

解答 $a=3$，$b=-2$，$c=1$

解説

$f(x)=ax^2+bx+c$ について $f'(x)=2ax+b$

また $\int_{0}^{1}f(x)dx=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_{0}^{1}=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c$

$f(1)=2$，$f'(0)=-2$，$\int_{0}^{1}f(x)dx=1$ から

$a+b+c=2$ ……①

$b=-2$ ……②

$\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c=1$ ……③

①～③を解いて $a=3$，$b=-2$，$c=1$

8．等式 $\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を利用して，次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-3}^{2}(x-2)(x+3)dx$ (2) $\int_{-2}^{1}(x^2+x-2)dx$

(3) $\int_{2-\sqrt{2}}^{2+\sqrt{2}}(x^2-4x+2)dx$

解答 (1) $-\frac{125}{6}$ (2) $-\frac{9}{2}$ (3) $-\frac{8\sqrt{2}}{3}$

解説

(1) $(与式)=\int_{-3}^{2}(x+3)(x-2)dx=-\frac{1}{6}\{2-(-3)\}^3=-\frac{1}{6}\cdot 5^3=-\frac{125}{6}$

(2) $(与式)=\int_{-2}^{1}(x+2)(x-1)dx=-\frac{1}{6}\{1-(-2)\}^3=-\frac{1}{6}\cdot 3^3=-\frac{9}{2}$

(3) $x^2-4x+2=0$ の解は $x=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot 2}=2\pm\sqrt{2}$

したがって $(与式)=\int_{2-\sqrt{2}}^{2+\sqrt{2}}\{x-(2-\sqrt{2})\}\{x-(2+\sqrt{2})\}dx$

$=-\frac{1}{6}\{(2+\sqrt{2})-(2-\sqrt{2})\}^3=-\frac{1}{6}\cdot(2\sqrt{2})^3=-\frac{8\sqrt{2}}{3}$

参考 $\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=\int_{\alpha}^{\beta}\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{\alpha+\beta}{2}x^2+\alpha\beta x\right]_{\alpha}^{\beta}$

$=\left\{\frac{\beta^3}{3}-\frac{(\alpha+\beta)\beta^2}{2}+\alpha\beta^2\right\}-\left\{\frac{\alpha^3}{3}-\frac{(\alpha+\beta)\alpha^2}{2}+\alpha^2\beta\right\}$

$=\frac{\beta^3-\alpha^3}{3}-\frac{(\alpha+\beta)(\beta^2-\alpha^2)}{2}+\alpha\beta(\beta-\alpha)$

$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)\times\{2(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)-3(\beta^2+2\beta\alpha+\alpha^2)+6\alpha\beta\}$

$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)\{-(\beta-\alpha)^2\}=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$