数学演習（積分法）Ｈ２０．１２．９　　　　　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1. 次の不定積分･定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (t+1)^2(t-2)^3dt$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(x^3-x+1)dx-\int_{1}^{2}(x-1-x^3)dx$

2. 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。　$f(x)=x^2+\displaystyle\int_0^1(2t-x)f(t)dt$

3. 次の等式を満たす関数$f(x)$を求めよ。また，定数aの値を求めよ。

$$\int_a^{-x}tf(t)dt=x^3-2x^2+a$$

4. 次の２曲線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1) $y=|x^2-1|$ ，$y=x+1$

(2) $x=y^2-3y+3$, $x=-y^2+2y+2$

5. 放物線 $y=-x^2+2x$…①，直線$y=mx$…②について，放物線① と直線②で囲まれた部分の面積をS_1 , 放物線①と直線②とx軸で囲まれた部分の面積をS_2とする。$S_1:S_2=1:7$ が成り立つとき，定数mの値を求めよ。ただし，$0<m<2$とする。

6. 放物線 $y=x^2-x+3$ …①について，放物線①に点$(1\ ,\ -1)$から引いた２本の接線と放物線①で囲まれた部分の面積を求めよ。

7. 放物線$y=x^2+x-1$ と 原点を通る直線とで囲まれた部分の面積を最小にするような直線の方程式を求めよ。また，そのときの面積を求めよ。

8. 曲線 $C:y=x^3-3x$ 上の点$(t\ ,\ t^3-3t)$ における接線を l とする。曲線 C と直線 l で囲まれた部分の面積を t を用いて表せ。ただし，$t\fallingdotseq 0$ とする。

9. 曲線 $y=x(x-a)(x-a^2)$ とx軸で囲まれた２つの部分の面積が等しくなるように，定数aの値を定めよ。ただし，$0<a<1$とする。

数学演習（積分法）Ｈ２０．１２．９　　　（　　）組（　　）番　名前（こたこ）

1. 次の不定積分・定積分を求めよ。

(1) $\int (t+1)^2(t-2)^3dt$

$= \int \{(t-2)+3\}^2(t-2)^3dt$

$= \int \{(t-2)^2+6(t-2)+9\}(t-2)^3dt$

$= \int \{(t-2)^5+6(t-2)^4+9(t-2)^3\}dt$

$= \frac{1}{6}(t-2)^6+\frac{6}{5}(t-2)^5+\frac{9}{4}(t-2)^4+C$

$= \frac{1}{60}(t-2)^4\{10(t-2)^2+72(t-2)+135\}+C$

$= \frac{1}{60}(t-2)^4(10t^2+32t+31)+C$　⑤

（Cは積分定数）

つける!!

(2) $\int_{-1}^{2}(x^3-x+1)dx-\int_{1}^{2}(x-1-x^3)dx$

$= \int_{-1}^{2}(x^3-x+1)dx+\int_{1}^{2}(x^3-x+1)dx$

$= \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^{2}+\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+x\right]_{1}^{2}$

$= (4-2+2)-(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-1)+(4-2+2)-(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1)$

$= 4+\frac{5}{4}+4-\frac{3}{4} = 8+\frac{2}{4} = \frac{17}{2}$　⑤

2. 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。　$f(x)=x^2+\int_0^1(2t-x)f(t)dt$

$f(x)=x^2+2\int_0^1 tf(t)dt-x\int_0^1 f(t)dt$

$a=\int_0^1 tf(t)dt$，$b=\int_0^1 f(t)dt$ とおくと $f(x)=x^2+2a-bx$

この時

$a=\int_0^1 t(t^2+2a-bt)dt$

$=\int_0^1(t^3+2at-bt^2)dt$

$=\left[\frac{1}{4}t^4+at^2-\frac{1}{3}bt^3\right]_0^1$

$=\frac{1}{4}+a-\frac{1}{3}b$

$b=\int_0^1(t^2+2a-bt)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3+2at-\frac{1}{2}bt^2\right]_0^1$

$=\frac{1}{3}+2a-\frac{1}{2}b$

解いて $a=\frac{19}{48}$，$b=\frac{3}{4}$

以上より $f(x)=x^2-\frac{3}{4}x+\frac{19}{24}$　⑩

3. 次の等式を満たす関数$f(x)$を求めよ。また，定数aの値を求めよ。

$$\int_a^{-x}tf(t)dt=x^3-2x^2+a$$

xに$-x$を代入すると

$\int_a^x tf(t)dt=(-x)^3-2(-x)^2+a$

$\therefore \int_a^x tf(t)dt=-x^3-2x^2+a$ …(*)

両辺微分して

$xf(x)=-3x^2-4x$

$\therefore f(x)=-3x-4$　⑤

また、(*)に $x=a$ を代入して

$\int_a^a tf(t)dt=-a^3-2a^2+a$

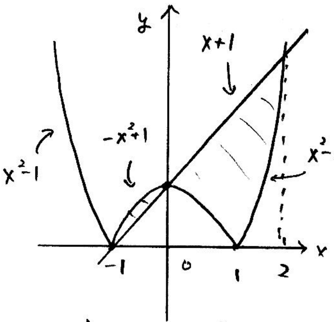
$\therefore a^3+2a^2-a=0$

$a(a^2+2a-1)=0$

$\therefore a=0,\ -1\pm\sqrt{2}$　⑤

4. 次の２曲線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1) $y=|x^2-1|$，$y=x+1$



・$x^2-1\geqq 0$ ($x\leqq -1, x\geqq 1$) の時

$x^2-1=x+1$

$\therefore$ 解いて $x=2, -1$

($x\leqq-1, x\geqq1$ を満たす)

・$x^2-1<0$ ($-1<x<1$) の時

$-(x^2-1)=x+1$

解いて $x=-1, 0$.

$-1<x<1$ より $x=0$.

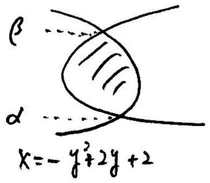
よって求める面積Sは

$S=\int_{-1}^{0}\{(-x^2+1)-(x+1)\}dx+\int_0^1\{(x+1)-(-x^2+1)\}dx+\int_1^2\{(x+1)-(x^2-1)\}dx$

$=-(-\frac{1}{6})\{0-(-1)\}^3+\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_1^2$

$=\frac{13}{6}$　⑩

(2) $x=y^2-3y+3$，$x=-y^2+2y+2$



交点は

$y^2-3y+3=-y^2+2y+2$

$\therefore 2y^2-5y+1=0$.

$\therefore y=\frac{5\pm\sqrt{25-8}}{4}=\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}$　（以下，α,βとおく）

この時

$S=\int_\alpha^\beta\{(-y^2+2y+2)-(y^2-3y+3)\}dy$

$=\int_\alpha^\beta(-2y^2+5y-1)dy$

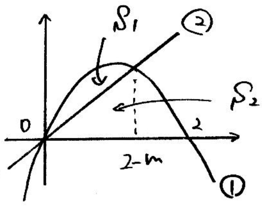
$=-2\int_\alpha^\beta(y-\alpha)(y-\beta)dy$

$=(-2)(-\frac{1}{6})(\beta-\alpha)^3$

$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^3$

$=\frac{17}{24}\sqrt{17}$　⑩

5. 放物線 $y=-x^2+2x$…①，直線$y=mx$…②について，放物線①と直線②で囲まれた部分の面積をS_1，放物線①と直線②とx軸で囲まれた部分の面積をS_2とする。$S_1:S_2=1:7$が成り立つとき，定数mの値を求めよ。ただし，$0<m<2$とする。



交点　$-x^2+2x=mx$

$x(x-2+m)=0$　$\therefore x=0,\ 2-m$

ここで、S_1+S_2は

①とx軸とで囲まれた部分に

なるので

$\int_0^2(-x^2+2x)dx$

$=-\int_0^2 x(x-2)dx=\frac{1}{6}\cdot2^3$

ここで $S_1:S_2=1:7$ より

$S_1=\frac{1}{8}(S_1+S_2)=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{6}\cdot2^3$

そして

$S_1=\int_0^{2-m}\{(-x^2+2x)-mx\}dx$

$=\frac{1}{6}(2-m)^3$ より

$\therefore$

$\frac{1}{6}(2-m)^3=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{6}\cdot2^3$

$\therefore (2-m)^3=1$

よって

$2-m=1$ より

$m=1$　⑩

6. 放物線 $y=x^2-x+3$ …①について，放物線①に点$(1, -1)$から引いた２本の接線と放物線①で囲まれた部分の面積を求めよ。

接点を$(t,\ t^2-t+3)$とおくと

この点における接線の方程式は

$$y-(t^2-t+3)=(2t-1)(x-t)$$

点$(1,-1)$を通るので

$$-1-(t^2-t+3)=(2t-1)(1-t)$$

$$\therefore\ t^2-2t-3=0$$

$$(t-3)(t+1)=0$$

$$\therefore\ t=3,\ -1$$

$t=3$の時

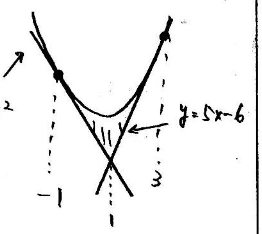
$$y-9=5(x-3)$$

より $y=5x-6$

$t=-1$の時

$$y-5=-3(x+1)$$

より $y=-3x+2$



求める面積Sは

$$S=\int_{-1}^{1}\{(x^2-x+3)-(-3x+2)\}dx+\int_{1}^{3}\{(x^2-x+3)-(5x-6)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^2+2x+1)dx+\int_{1}^{3}(x^2-6x+9)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x+1)^2dx+\int_{1}^{3}(x-3)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{1}{3}(x-3)^3\right]_{1}^{3}$$

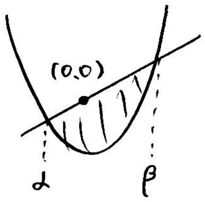
$$=\frac{1}{3}\cdot 2^3-0+0-\frac{1}{3}(-2)^3$$

$$=\frac{16}{3}$$

10

7. 放物線$y=x^2+x-1$と原点を通る直線とで囲まれた部分の面積を最小にするような直線の方程式を求めよ。また，そのときの面積を求めよ。

直線の方程式を $y=mx$ とする時，交点は



$$x^2+x-1=mx$$

$$x^2+(1-m)x-1=0\ \cdots(*)$$

$$\therefore\ D=(1-m)^2-4\cdot 1\cdot(-1)$$

$$=(1-m)^2+4>0$$

よって放物線と直線は異なる２点で交わる。

ここで，交点のx座標を$\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$とすると，

α, βは２次方程式$(*)$の解である。

10

また，面積Sは

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\{mx-(x^2+x-1)\}dx$$

$$=-\int_{\alpha}^{\beta}\{x^2+(1-m)x-1\}dx$$

$$=-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

ここで，$\alpha=\dfrac{m-1-\sqrt{D}}{2}$，$\beta=\dfrac{m-1+\sqrt{D}}{2}$ より $\beta-\alpha=\sqrt{D}$

$$\therefore\ S=\frac{1}{6}(\sqrt{D})^3=\frac{1}{6}\{(m-1)^2+4\}^{\frac{3}{2}}$$ より

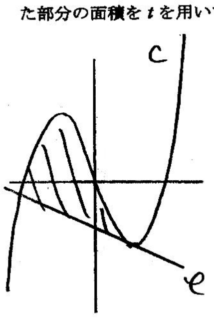
Sは $m=1$の時最小値

$$\frac{1}{6}\cdot 4^{\frac{3}{2}}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

またこの時

$y=x$

8. 曲線 $C: y=x^3-3x$ 上の点$(t,\ t^3-3t)$における接線をlとする。曲線Cと直線lで囲まれた部分の面積をtを用いて表せ。$(t\neq 0)$



接線の方程式は

$$y-(t^3-3t)=(3t^2-3)(x-t)$$

$$\therefore\ y=(3t^2-3)x-2t^3$$

もう1つの交点は

$$x^3-3x=(3t^2-3)x-2t^3$$

$$\therefore\ x^3-3t^2x+2t^3=0\ \cdots(*)$$

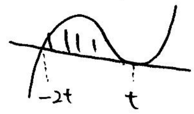
ここで，曲線Cと直線lは $x=t$で接しているので，方程式$(*)$は$(x-t)^2$で割り切れる

$$\therefore\ x^3-3t^2x+2t^3=(x-t)^2(x+2t)=0$$

$$\therefore\ x=t,\ -2t$$

今，$t\neq 0$より，tと$-2t$の大小を比べる。

ここで，$t>0$の時，$-2t<t$ より下図。



$$S=\int_{-2t}^{t}(\text{曲線}-\text{直線}l)dx$$

$$=\int_{-2t}^{t}(x^3-3t^2x+2t^3)dx$$

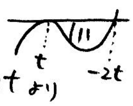
$$=\int_{-2t}^{t}(x-t)^2(x+2t)dx$$

$$=\int_{-2t}^{t}\{(x-t)^3+3t(x-t)^2\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}(x-t)^4+t(x-t)^3\right]_{-2t}^{t}$$

$$=-\frac{1}{4}(-3t)^4-t(-3t)^3$$

$$=\frac{27}{4}t^4$$



$t<0$の時も $t<-2t$ より

$$S=\int_{t}^{-2t}(\text{直}-\text{曲})dx=\int_{-2t}^{t}(\text{曲}-\text{直})dx=\frac{27}{4}t^4$$

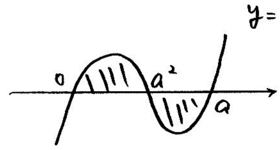
よって $\dfrac{27}{4}t^4$

10

9. 曲線 $y=x(x-a)(x-a^2)$ とx軸で囲まれた２つの部分の面積が等しくなるように，定数aの値を定めよ。ただし，$0<a<1$とする。

$0<a<1$ より $0<a^2<a$

$y=x(x-a)(x-a^2)$



よって

$$\int_{0}^{a^2}\{x(x-a)(x-a^2)-0\}dx=\int_{a^2}^{a}\{0-x(x-a)(x-a^2)\}dx$$

$$\therefore\ \int_{0}^{a^2}x(x-a)(x-a^2)dx+\int_{a^2}^{a}x(x-a)(x-a^2)dx=0$$

つまり

$$\int_{0}^{a}x(x-a)(x-a^2)dx=0$$

が成り立つ。

ここで，

$$\int_{0}^{a}x(x-a)(x-a^2)dx$$

$$=\int_{0}^{a}\{x^3-(a+a^2)x^2+a^3x\}dx$$

10

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+a^2)x^3+a^3\cdot\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{a}$$

$$=\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{3}(a+a^2)a^3+\frac{1}{2}a^3\cdot a^2=0$$

$$a^4\left\{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}(1+a)+\frac{1}{2}a\right\}=0$$

$0<a<1$より $\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}(1+a)+\dfrac{1}{2}a=0$

$$\therefore\ a=\frac{1}{2}$$

（これは $0<a<1$ を満たす）