数学演習（面積）Ｈ２４．６．２７　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1．次の曲線と 2 直線，および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1) $y=3x^2+1$，$x=1$，$x=3$　　(2) $y=-x^2-2$，$x=-1$，$x=2$

(3) $y=x^2-4x+5$，$x=0$，$x=2$

2．次の放物線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1) $y=-x^2+3x$　　(2) $y=x^2+2x-3$　　(3) $y=-x^2+6x-8$

3．次の曲線または直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1) $y=x^2+x-4$，$y=3x-1$　　(2) $y=x^2-4x+2$，$y=-x^2+2x-2$

(3) $y=x^2+x+1$，$y=2x^2-3x+1$

4．次の曲線や直線によって囲まれた部分の面積を求めよ。

(1)　$y=x^2+x$，$y=6$

(2)　$y=x^2-3x+3$，$y=-x^2+2$

5．次の曲線または直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1)　$y=x^2-4x-2$，x 軸

(2)　$y=x^2+x$，$y=1-x$

(3)　$y=-x^2-4x+5$ $(-2 \leqq x \leqq 3)$，$x=-2$，$x=3$，x 軸

(4)　$y=|x^2-x-2|$ $(0 \leqq x \leqq 3)$，$x=0$，$x=3$，x 軸

6．次の定積分を求めよ。

(1)　$\int_0^3 |x-1|\,dx$

(2)　$\int_0^5 |x^2-16|\,dx$

(3)　$\int_{-1}^2 |x^2-4x|\,dx$

数学演習（面積）Ｈ２４．６．２７　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1．次の曲線と２直線，および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1) $y=3x^2+1$，$x=1$，$x=3$　　(2) $y=-x^2-2$，$x=-1$，$x=2$

(3) $y=x^2-4x+5$，$x=0$，$x=2$

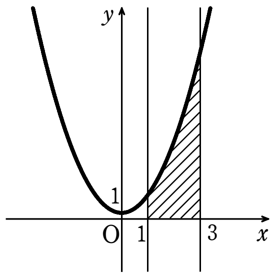
解答　(1) 28　(2) 9　(3) $\frac{14}{3}$

解説

求める面積を S とする。

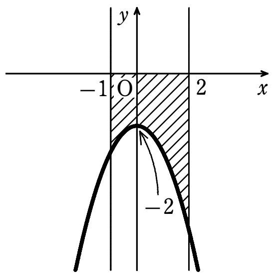
(1) 常に $y>0$ であるから

$$S=\int_1^3(3x^2+1)dx=\Big[x^3+x\Big]_1^3=(27+3)-(1+1)=28$$



(2) 常に $y<0$ であるから

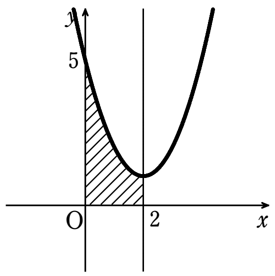
$$S=-\int_{-1}^2(-x^2-2)dx=\int_{-1}^2(x^2+2)dx=\left[\frac{x^3}{3}+2x\right]_{-1}^2=\left(\frac{8}{3}+4\right)-\left(-\frac{1}{3}-2\right)=9$$



(3) $y=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$

常に $y>0$ であるから

$$S=\int_0^2(x^2-4x+5)dx=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+5x\right]_0^2=\frac{8}{3}-8+10=\frac{14}{3}$$



2．次の放物線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1) $y=-x^2+3x$　　(2) $y=x^2+2x-3$　　(3) $y=-x^2+6x-8$

解答　(1) $\frac{9}{2}$　(2) $\frac{32}{3}$　(3) $\frac{4}{3}$

解説

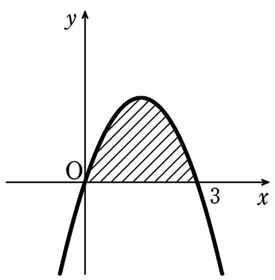
求める面積を S とする。

(1) 放物線と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$-x^2+3x=0$ を解いて　$x=0$，3

$0\leqq x\leqq 3$ では，$y\geqq 0$ であるから

$$S=\int_0^3(-x^2+3x)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=-9+\frac{27}{2}=\frac{9}{2}$$



別解　[積分の計算]

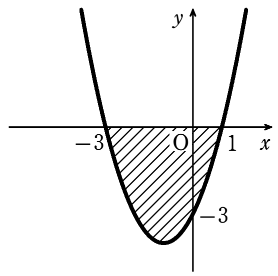
$$S=\int_0^3(-x^2+3x)dx=-\int_0^3x(x-3)dx=\frac{1}{6}(3-0)^3=\frac{9}{2}$$

(2) 放物線と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$x^2+2x-3=0$ を解いて　$x=-3$，1

$-3\leqq x\leqq 1$ では，$y\leqq 0$ であるから

$$S=-\int_{-3}^1(x^2+2x-3)dx=-\left[\frac{x^3}{3}+x^2-3x\right]_{-3}^1=-\left\{\left(\frac{1}{3}+1-3\right)-(-9+9+9)\right\}=\frac{32}{3}$$



別解　[積分の計算]

$$S=-\int_{-3}^1(x^2+2x-3)dx=-\int_{-3}^1(x+3)(x-1)dx=\frac{1}{6}\{1-(-3)\}^3=\frac{32}{3}$$

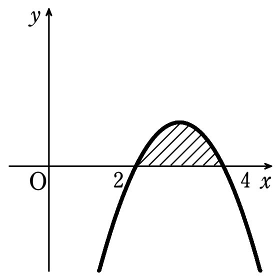
(3) 放物線と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$-x^2+6x-8=0$ すなわち $x^2-6x+8=0$ を解いて

$x=2$，4

$2\leqq x\leqq 4$ では，$y\geqq 0$ であるから

$$S=\int_2^4(-x^2+6x-8)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+3x^2-8x\right]_2^4=\left(-\frac{64}{3}+48-32\right)-\left(-\frac{8}{3}+12-16\right)=\frac{4}{3}$$



別解　[積分の計算]

$$S=\int_2^4(-x^2+6x-8)dx=-\int_2^4(x-2)(x-4)dx=\frac{1}{6}(4-2)^3=\frac{4}{3}$$

3．次の曲線または直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1) $y=x^2+x-4$，$y=3x-1$　　(2) $y=x^2-4x+2$，$y=-x^2+2x-2$

(3) $y=x^2+x+1$，$y=2x^2-3x+1$

解答　(1) $\frac{32}{3}$　(2) $\frac{1}{3}$　(3) $\frac{32}{3}$

解説

求める面積を S とする。

(1) 曲線と直線の交点の x 座標は，方程式

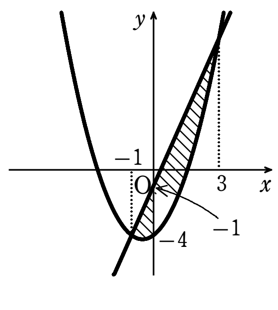
$x^2+x-4=3x-1$

すなわち　$x^2-2x-3=0$ を解いて

$x=-1$，3

$-1\leqq x\leqq 3$ では，$x^2+x-4\leqq 3x-1$ であるから

$$S=\int_{-1}^3\{(3x-1)-(x^2+x-4)\}dx=-\int_{-1}^3(x^2-2x-3)dx=-\left[\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right]_{-1}^3=-\left\{(9-9-9)-\left(-\frac{1}{3}-1+3\right)\right\}=\frac{32}{3}$$



別解　[積分の計算]

$$S=-\int_{-1}^3(x^2-2x-3)dx=-\int_{-1}^3(x+1)(x-3)dx=\frac{1}{6}\{3-(-1)\}^3=\frac{32}{3}$$

(2) ２曲線の交点の x 座標は，方程式

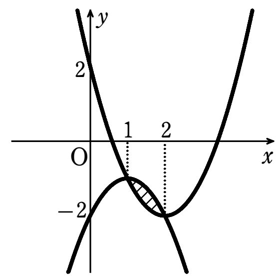
$x^2-4x+2=-x^2+2x-2$

すなわち　$2x^2-6x+4=0$ を解いて

$x=1$，2

$1\leqq x\leqq 2$ では，$x^2-4x+2\leqq -x^2+2x-2$ であるから

$$S=\int_1^2\{(-x^2+2x-2)-(x^2-4x+2)\}dx=-2\int_1^2(x^2-3x+2)dx=-2\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_1^2=-2\left\{\left(\frac{8}{3}-6+4\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right)\right\}=\frac{1}{3}$$



別解　[積分の計算]

$$S=-2\int_1^2(x^2-3x+2)dx=-2\int_1^2(x-1)(x-2)dx=\frac{2}{6}(2-1)^3=\frac{1}{3}$$

(3) ２曲線の交点の x 座標は，方程式

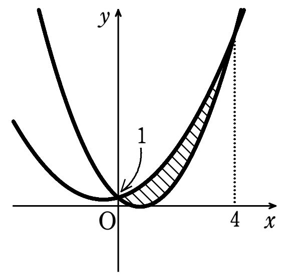
$x^2+x+1=2x^2-3x+1$

すなわち　$x^2-4x=0$ を解いて

$x=0$，4

$0\leqq x\leqq 4$ では，$x^2+x+1\geqq 2x^2-3x+1$ であるから

$$S=\int_0^4\{(x^2+x+1)-(2x^2-3x+1)\}dx=-\int_0^4(x^2-4x)dx=-\left[\frac{x^3}{3}-2x^2\right]_0^4=-\left(\frac{64}{3}-32\right)=\frac{32}{3}$$



別解　[積分の計算]

$$S=-\int_0^4(x^2-4x)dx=-\int_0^4x(x-4)dx=\frac{1}{6}(4-0)^3=\frac{32}{3}$$

4．次の曲線や直線によって囲まれた部分の面積を求めよ。

(1) $y=x^2+x$，$y=6$　　(2) $y=x^2-3x+3$，$y=-x^2+2$

解答　(1) $\frac{125}{6}$　(2) $\frac{1}{24}$

解説

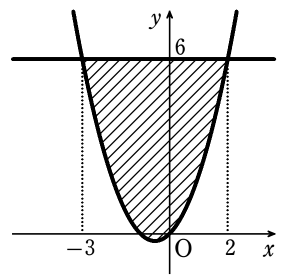
求める面積を S とする。

(1) 放物線と直線の交点の x 座標は，方程式

$x^2+x=6$ を解いて　$x=-3$，2

$-3\leqq x\leqq 2$ では，$x^2+x\leqq 6$ であるから

$$S=\int_{-3}^2\{6-(x^2+x)\}dx=-\int_{-3}^2(x^2+x-6)dx=-\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-6x\right]_{-3}^2=-\left\{\left(\frac{8}{3}+2-12\right)-\left(-9+\frac{9}{2}+18\right)\right\}=\frac{125}{6}$$



別解　[積分の計算]

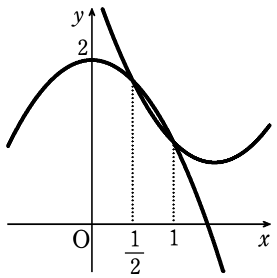
$S=-\int_{-3}^{2}(x^2+x-6)dx=-\int_{-3}^{2}(x+3)(x-2)dx=\frac{1}{6}\{2-(-3)\}^3=\frac{125}{6}$

(2)　2 曲線の交点の x 座標は，方程式

$x^2-3x+3=-x^2+2$

すなわち　$2x^2-3x+1=0$ を解いて

$x=\frac{1}{2},\ 1$



$\frac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ では，$x^2-3x+3\leqq -x^2+2$ であるから

$$S=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\{(-x^2+2)-(x^2-3x+3)\}dx$$

$$=-\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x^2-3x+1)dx=-\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+x\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=-\left\{\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{2}+1\right)-\left(\frac{1}{12}-\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\right)\right\}=\frac{1}{24}$$

別解　[積分の計算]

$$S=-\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x^2-3x+1)dx=-2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)dx=\frac{2}{6}\left(1-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{24}$$

5．次の曲線または直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1)　$y=x^2-4x-2$，x 軸　　(2)　$y=x^2+x$，$y=1-x$

(3)　$y=-x^2-4x+5\ (-2\leqq x\leqq 3)$，$x=-2$，$x=3$，$x$ 軸

(4)　$y=|x^2-x-2|\ (0\leqq x\leqq 3)$，$x=0$，$x=3$，$x$ 軸

解答　(1)　$8\sqrt{6}$　　(2)　$\frac{8\sqrt{2}}{3}$　　(3)　$\frac{98}{3}$　　(4)　$\frac{31}{6}$

解説

求める面積を S とする。

(1)　曲線と直線の交点の x 座標は，方程式

$x^2-4x-2=0$ を解いて　　$x=2\pm\sqrt{6}$

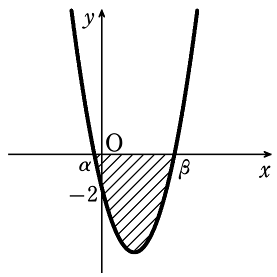
$\alpha=2-\sqrt{6}$，$\beta=2+\sqrt{6}$ とおくと，$\alpha\leqq x\leqq\beta$ では，

$x^2-4x-2\leqq 0$ であるから

$$S=-\int_{\alpha}^{\beta}(x^2-4x-2)dx$$

$$=-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(2\sqrt{6})^3=8\sqrt{6}$$



(2)　曲線と直線の交点の x 座標は，方程式

$x^2+x=1-x$　すなわち　$x^2+2x-1=0$

を解いて　　$x=-1\pm\sqrt{2}$

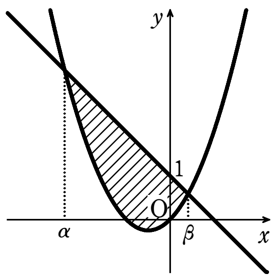
$\alpha=-1-\sqrt{2}$，$\beta=-1+\sqrt{2}$ とおくと，

$\alpha\leqq x\leqq\beta$ では，$1-x\geqq x^2+x$ であるから

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\{(1-x)-(x^2+x)\}dx$$

$$=-\int_{\alpha}^{\beta}(x^2+2x-1)dx=-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(2\sqrt{2})^3=\frac{8\sqrt{2}}{3}$$



(3)　$-x^2-4x+5=-(x-1)(x+5)$ であるから

$-2\leqq x\leqq 1$ では　$y\geqq 0$

$1\leqq x\leqq 3$ では　$y\leqq 0$

よって，求める面積は

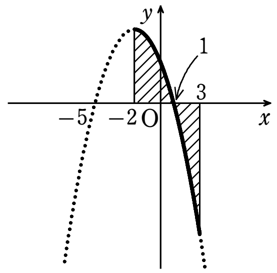
$$S=\int_{-2}^{1}(-x^2-4x+5)dx-\int_{1}^{3}(-x^2-4x+5)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}-2x^2+5x\right]_{-2}^{1}-\left[-\frac{x^3}{3}-2x^2+5x\right]_{1}^{3}$$

$$=\left(-\frac{1}{3}-2+5\right)-\left(\frac{8}{3}-8-10\right)$$

$$-\left\{(-9-18+15)-\left(-\frac{1}{3}-2+5\right)\right\}$$

$$=\frac{98}{3}$$



(4)　$|x^2-x-2|=|(x+1)(x-2)|$ であるから

$0\leqq x\leqq 2$ のとき　$y=-(x^2-x-2)$

$2\leqq x\leqq 3$ のとき　$y=x^2-x-2$

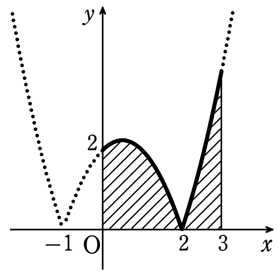
よって，求める面積は

$$S=-\int_{0}^{2}(x^2-x-2)dx+\int_{2}^{3}(x^2-x-2)dx$$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_{0}^{2}+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_{2}^{3}$$

$$=-\left(\frac{8}{3}-2-4\right)+\left\{\left(9-\frac{9}{2}-6\right)-\left(\frac{8}{3}-2-4\right)\right\}$$

$$=\frac{31}{6}$$



6．次の定積分を求めよ。

(1)　$\int_{0}^{3}|x-1|dx$　　(2)　$\int_{0}^{5}|x^2-16|dx$　　(3)　$\int_{-1}^{2}|x^2-4x|dx$

解答　(1)　$\frac{5}{2}$　　(2)　47　　(3)　$\frac{23}{3}$

解説

(1)　$|x-1|=\begin{cases}x-1 & (x-1\geqq 0\text{のとき})\\ -(x-1) & (x-1<0\text{のとき})\end{cases}$

つまり，xの不等式を解いて

$|x-1|=\begin{cases}x-1 & (x\geqq 1\text{のとき})\\ -(x-1) & (x<1\text{のとき})\end{cases}$

となる。積分範囲が$0\leqq x\leqq 3$より

$0\leqq x\leqq 1$ のとき　$|x-1|=-(x-1)=-x+1$

$1\leqq x\leqq 3$ のとき　$|x-1|=x-1$

したがって

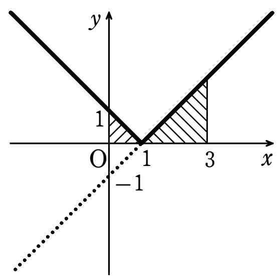
$$\int_{0}^{3}|x-1|dx=\int_{0}^{1}|x-1|dx+\int_{1}^{3}|x-1|dx$$

$$=\int_{0}^{1}(-x+1)dx+\int_{1}^{3}(x-1)dx$$

$$=\left[-\frac{x^2}{2}+x\right]_{0}^{1}+\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_{1}^{3}$$

$$=\left\{\left(-\frac{1}{2}+1\right)-0\right\}+\left\{\left(\frac{9}{2}-3\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right\}$$

$$=\frac{5}{2}$$



(2)　$|x^2-16|=\begin{cases}x^2-16 & (x^2-16\geqq 0\text{のとき})\\ -(x^2-16) & (x^2-16<0\text{のとき})\end{cases}$

つまり，xの不等式を解いて

$|x^2-16|=\begin{cases}x^2-16 & (x\leqq -4,\ x\geqq 4\text{のとき})\\ -(x^2-16) & (-4<x<4\text{のとき})\end{cases}$

となる。積分範囲が$0\leqq x\leqq 5$より

$0\leqq x\leqq 4$ のとき　$|x^2-16|=-(x^2-16)=-x^2+16$

$4\leqq x\leqq 5$ のとき　$|x^2-16|=x^2-16$

したがって

$$\int_{0}^{5}|x^2-16|dx=\int_{0}^{4}|x^2-16|dx+\int_{4}^{5}|x^2-16|dx$$

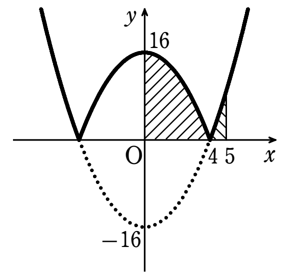
$$=\int_{0}^{4}(-x^2+16)dx+\int_{4}^{5}(x^2-16)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+16x\right]_{0}^{4}+\left[\frac{x^3}{3}-16x\right]_{4}^{5}$$

$$=\left\{\left(-\frac{64}{3}+64\right)-0\right\}$$

$$+\left\{\left(\frac{125}{3}-80\right)-\left(\frac{64}{3}-64\right)\right\}$$

$$=47$$



(3)　$|x^2-4x|=\begin{cases}x^2-4x & (x^2-4x\geqq 0\text{のとき})\\ -(x^2-4x) & (x^2-4x<0\text{のとき})\end{cases}$

つまり，xの不等式を解いて

$|x^2-4x|=\begin{cases}x^2-4x & (x\leqq 0,\ x\geqq 4\text{のとき})\\ -(x^2-4x) & (0<x<4\text{のとき})\end{cases}$

となる。積分範囲が$-1\leqq x\leqq 2$より

$-1\leqq x\leqq 0$ のとき　$|x^2-4x|=x^2-4x$

$0\leqq x\leqq 2$ のとき　$|x^2-4x|=-(x^2-4x)=-x^2+4x$

したがって

$$\int_{-1}^{2}|x^2-4x|dx=\int_{-1}^{0}|x^2-4x|dx+\int_{0}^{2}|x^2-4x|dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(x^2-4x)dx+\int_{0}^{2}(-x^2+4x)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2\right]_{0}^{2}$$

$$=\left\{0-\left(-\frac{1}{3}-2\right)\right\}+\left\{\left(-\frac{8}{3}+8\right)-0\right\}$$

$$=\frac{23}{3}$$