数学演習（積分法）Ｈ２０．１２．６　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1. x の 2 次関数 $f(x)$ およびその原始関数 $F(x)$ が次の等式を満たすとき，$F(x)$ を求めよ。

$$x^2f'(x)+F(x)=14x^3+6x^2+3x+5$$

2. 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(1)　$f(x)=x^2-1+\int_0^1 tf(t)\,dt$　　　(2)　$f(x)=3x+\int_0^1 (x+t)f(t)\,dt$

3. (1)　等式 $\int_a^x f(t)\,dt=x^3-2x+1$ を満たす関数 $f(x)$ および定数 a の値を求めよ。

(2)　関数 $f(x)=\int_{-3}^x (t^2-t-2)\,dt$ $(-3\leqq x\leqq 3)$ の最大値，最小値を求めよ。

4. 次の不等式を同時に満たす点 $(x,\ y)$ の存在する部分の面積を求めよ。

$$y\geqq x^2+1,\quad y\geqq x+3,\quad y\leqq x+6$$

5. 次の定積分を求めよ。 $\displaystyle\int_{-3}^{4}(|x^2-4|-x^2+2)dx$

6. 曲線$y=x^3-5x^2+2x+6$ とその曲線上の点$(3,\ -6)$における接線で囲まれた部分の 面積 S を求めよ。

7. $0 \leqq a \leqq 2$ とする。放物線 $y=3x(x-2)$ と直線 $x=a$, $x=a+1$ および x 軸で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とする。

(1) $S(a)$ を求めよ。

(2) a が $0 \leqq a \leqq 2$ の範囲を動くとき，$S(a)$ の最大値とそのときの a の値を求めよ。

解説

1. $f(x)=ax^2+bx+c$ とすると

$$f'(x)=2ax+b$$

$$F(x)=\int f(x)\,dx=\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx+C\quad (C\text{ は積分定数})$$

よって　$x^2f'(x)+F(x)=x^2(2ax+b)+\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx+C$

$$=\frac{7}{3}ax^3+\frac{3}{2}bx^2+cx+C$$

条件より　$\frac{7}{3}ax^3+\frac{3}{2}bx^2+cx+C=14x^3+6x^2+3x+5$

この両辺の係数を比較すると

$$\frac{7}{3}a=14,\ \frac{3}{2}b=6,\ c=3,\ C=5$$

すなわち　$a=6,\ b=4,\ c=3,\ C=5$

ゆえに　$F(x)=2x^3+2x^2+3x+5$

解説

2. (1)　$\int_0^1 tf(t)\,dt=a$ とおくと　　$f(x)=x^2-1+a$

ゆえに　$\int_0^1 tf(t)\,dt=\int_0^1 t(t^2-1+a)\,dt=\int_0^1\{t^3+(a-1)t\}\,dt$

$$=\left[\frac{t^4}{4}+\frac{a-1}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{4}+\frac{a-1}{2}$$

よって　$a=\frac{1}{4}+\frac{a-1}{2}$　　　ゆえに　$a=-\frac{1}{2}$

したがって　$f(x)=x^2-\frac{3}{2}$

(2)　等式から　$f(x)=3x+x\int_0^1 f(t)\,dt+\int_0^1 tf(t)\,dt$

$\int_0^1 f(t)\,dt=a$，$\int_0^1 tf(t)\,dt=b$ とおくと　　$f(x)=(a+3)x+b$

ゆえに　$\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1\{(a+3)t+b\}\,dt=\left[\frac{1}{2}(a+3)t^2+bt\right]_0^1=\frac{1}{2}(a+3)+b$

$$\int_0^1 tf(t)\,dt=\int_0^1\{(a+3)t^2+bt\}\,dt=\left[\frac{1}{3}(a+3)t^3+\frac{1}{2}bt^2\right]_0^1=\frac{1}{3}(a+3)+\frac{1}{2}b$$

よって　$\frac{1}{2}(a+3)+b=a$，$\frac{1}{3}(a+3)+\frac{1}{2}b=b$

ゆえに　$a-2b=3$，$2a-3b=-6$

これを解いて　$a=-21$，$b=-12$

したがって　$f(x)=-18x-12$

解説

3. (1)　$\int_a^x f(t)\,dt=x^3-2x+1$ ……① とする。

① の両辺を x で微分すると　$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=3x^2-2$

したがって　$f(x)=3x^2-2$

また，① で $x=a$ とおくと，左辺は 0 になるから　$0=a^3-2a+1$

よって　$(a-1)(a^2+a-1)=0$　　　したがって　$a=1,\ \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

(2)　$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_{-3}^x(t^2-t-2)\,dt=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-1,\ 2$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	極大	↘	極小	↗	

また　$f(x)=\int_{-3}^x(t^2-t-2)\,dt=\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}-2t\right]_{-3}^x=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+\frac{15}{2}$

ゆえに　$f(-3)=0$，$f(-1)=\frac{26}{3}$，$f(2)=\frac{25}{6}$，$f(3)=6$

よって　$x=-1$ のとき最大値 $\frac{26}{3}$，$x=-3$ のとき最小値 0

解説

4. 放物線 $y=x^2+1$ と直線 $y=x+3$ の交点の x 座標は，方程式

$x^2+1=x+3$　すなわち　$x^2-x-2=0$

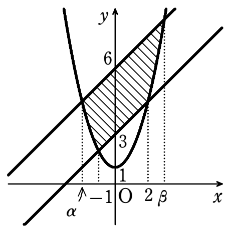
を解いて　$x=-1,\ 2$

放物線 $y=x^2+1$ と直線 $y=x+6$ の交点の x 座標は，方程式

$x^2+1=x+6$　すなわち　$x^2-x-5=0$

を解いて　$x=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}$　（以下，α，β とおく）

よって，与えられた不等式を同時に満たす点 $(x,\ y)$ の存在する部分は右図の斜線部分である。



したがって，求める面積は

$$\int_\alpha^\beta\{(x+6)-(x^2+1)\}\,dx-\int_{-1}^2\{(x+3)-(x^2+1)\}\,dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx+\int_{-1}^2(x+1)(x-2)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3-\frac{1}{6}\{2-(-1)\}^3=\frac{7\sqrt{21}-9}{2}$$

解説

5. $|x^2-4|=|(x+2)(x-2)|$ であるから

$-2\leqq x\leqq 2$ のとき　$|x^2-4|=-(x^2-4)$

$-3\leqq x\leqq -2$，$2\leqq x\leqq 4$ のとき　$|x^2-4|=x^2-4$

よって　$\int_{-3}^4(|x^2-4|-x^2+2)\,dx$

$$=\int_{-3}^{-2}(x^2-4-x^2+2)\,dx+\int_{-2}^2\{-(x^2-4)-x^2+2\}\,dx+\int_2^4(x^2-4-x^2+2)\,dx$$

$$=\int_{-3}^{-2}(-2)\,dx+\int_{-2}^2(-2x^2+6)\,dx+\int_2^4(-2)\,dx$$

$$=\Big[-2x\Big]_{-3}^{-2}+2\left[-\frac{2}{3}x^3+6x\right]_0^2+\Big[-2x\Big]_2^4=-2+\frac{40}{3}-4=\frac{22}{3}$$

解説

6. $y'=3x^2-10x+2$ であるから，接線の方程式は

$y-(-6)=(3\cdot 3^2-10\cdot 3+2)(x-3)$

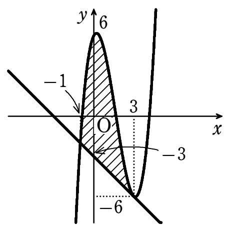
すなわち　$y=-x-3$

この接線と曲線の共有点の x 座標は，

$x^3-5x^2+2x+6=-x-3$

すなわち　$x^3-5x^2+3x+9=0$　の解である。

左辺が $(x-3)^2$ を因数にもつことに注意して，因数分解すると　$(x-3)^2(x+1)=0$



よって　$x=3,\ -1$

したがって，図から，求める面積は

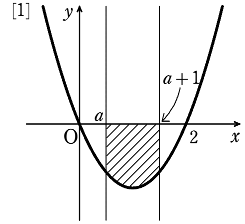
$$S=\int_{-1}^3\{(x^3-5x^2+2x+6)-(-x-3)\}\,dx=\int_{-1}^3(x-3)^2(x+1)\,dx$$

$$=\int_{-1}^3(x-3)^2\{(x-3)+4\}\,dx=\int_{-1}^3\{(x-3)^3+4(x-3)^2\}\,dx$$

$$=\left[\frac{(x-3)^4}{4}\right]_{-1}^3+4\left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_{-1}^3=-64+\frac{256}{3}=\frac{64}{3}$$

解説

7. (1)　[1]　$0\leqq a<1$ のとき



$$S(a)=-\int_a^{a+1}3x(x-2)\,dx$$

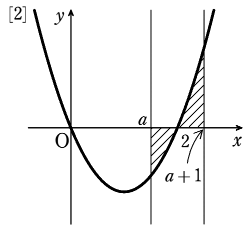
$$=-\int_a^{a+1}(3x^2-6x)\,dx$$

$$=-\Big[x^3-3x^2\Big]_a^{a+1}$$

$$=-\{(a+1)^3-3(a+1)^2\}+(a^3-3a^2)$$

$$=-3a^2+3a+2$$

[2]　$1\leqq a\leqq 2$ のとき



$$S(a)=-\int_a^2 3x(x-2)\,dx+\int_2^{a+1}3x(x-2)\,dx$$

$$=-\int_a^2(3x^2-6x)\,dx+\int_2^{a+1}(3x^2-6x)\,dx$$

$$=-\Big[x^3-3x^2\Big]_a^2+\Big[x^3-3x^2\Big]_2^{a+1}$$

$$=-(8-12)+(a^3-3a^2)$$

$$+\{(a+1)^3-3(a+1)^2\}-(8-12)$$

$$=2a^3-3a^2-3a+6$$

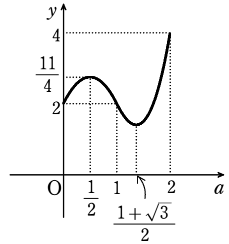
(2)　[1]　$0\leqq a<1$ のとき　$S(a)=-3a^2+3a+2=-3\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$

[2]　$1\leqq a\leqq 2$ のとき　$S'(a)=6a^2-6a-3=3(2a^2-2a-1)$

$S'(a)=0$ とすると　$a=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$　　$1\leqq a\leqq 2$ であるから　$a=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$1\leqq a\leqq 2$ における $S(a)$ の増減表は，次のようになる。

a	1	$\cdots$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	2
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$	2	↘	極小	↗	4



[1]，[2] から，$y=S(a)$ のグラフは右図のようになる。

したがって，$S(a)$ は，$a=2$ のとき最大値 4 をとる。

注意　$0\leqq a\leqq 1$，$1<a\leqq 2$ と場合分けして

$0\leqq a\leqq 1$ のとき　$S(a)=-3a^2+3a+2$

$1<a\leqq 2$ のとき　$S(a)=2a^3-3a^2-3a+6$

としてもよい。