数学演習（面積）Ｈ２２．１２．６　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１．(1) $\displaystyle\int_1^4 |x-2|\,dx$ を求めよ。　(2) $\displaystyle\int_0^4 |x^2-4|\,dx$ を求めよ。

２．次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^3 |x^2-2x|\,dx$　(2) $\displaystyle\int_0^3 x|x-1|\,dx$

３．放物線 $y=ax-x^2$ $(a>0)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S が $\dfrac{9}{2}$ になるように，定数 a の値を定めよ。

４．放物線 $y=-x^2+4x$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。
また，この囲まれた部分が直線 $y=mx$ によって上側と下側に $1:7$ の面積比で分けられるとき，定数 m の値を求めよ。ただし，$0<m<4$とする。

５．放物線 $y=2x-x^2$ と x 軸で囲まれた部分の面積を直線 $y=mx$ が２等分するように，定数 m の値を定めよ。ただし，$0<m<2$とする。

６．放物線 $y=x(3-x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を，直線 $y=ax$ が２等分するとき，a の値を求めよ。ただし，$0<a<3$とする。

数学演習（面積）Ｈ２２．１２．６　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1．(1) $\int_1^4|x-2|dx$ を求めよ。　　　(2) $\int_0^4|x^2-4|dx$ を求めよ。

解答　(1) $\frac{5}{2}$　　(2) 16

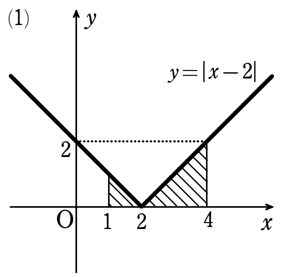
解説

(1) $1\leqq x\leqq 2$ のとき　$|x-2|=-(x-2)$

$2\leqq x\leqq 4$ のとき　$|x-2|=x-2$

よって

$$\int_1^4|x-2|dx=\int_1^2\{-(x-2)\}dx+\int_2^4(x-2)dx$$
$$=-\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^2+\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^4$$
$$=-\left\{(2-4)-\left(\frac{1}{2}-2\right)\right\}+(8-8)-(2-4)$$
$$=-(-2)\times 2+\frac{1}{2}-2=\frac{5}{2}$$

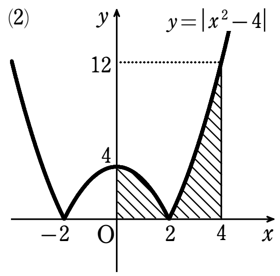


(2) $0\leqq x\leqq 2$ のとき　$|x^2-4|=-(x^2-4)$

$2\leqq x\leqq 4$ のとき　$|x^2-4|=x^2-4$

よって

$$\int_0^4|x^2-4|dx=\int_0^2\{-(x^2-4)\}dx+\int_2^4(x^2-4)dx$$
$$=-\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_0^2+\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_2^4$$
$$=-2\left(\frac{8}{3}-8\right)+\left(\frac{64}{3}-16\right)$$
$$=16$$



2．次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^3|x^2-2x|dx$　　　(2) $\int_0^3 x|x-1|dx$

解答　(1) $\frac{8}{3}$　　(2) $\frac{29}{6}$

解説

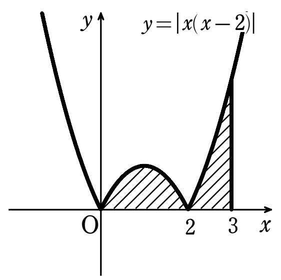
(1) $x^2-2x=x(x-2)$ であるから

$0\leqq x\leqq 2$ のとき　$|x^2-2x|=-(x^2-2x)$

$2\leqq x\leqq 3$ のとき　$|x^2-2x|=x^2-2x$

よって

$$\int_0^3|x^2-2x|dx=\int_0^2\{-(x^2-2x)\}dx+\int_2^3(x^2-2x)dx$$
$$=-\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_0^2+\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_2^3$$
$$=-2\left(\frac{2^3}{3}-2^2\right)+\left(\frac{3^3}{3}-3^2\right)$$
$$=-2\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{8}{3}$$

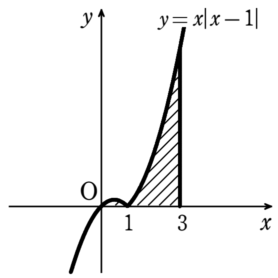


(2) $0\leqq x\leqq 1$ のとき　$|x-1|=-(x-1)$

$1\leqq x\leqq 3$ のとき　$|x-1|=x-1$

よって

$$\int_0^3 x|x-1|dx=\int_0^1\{-x(x-1)\}dx+\int_1^3 x(x-1)dx$$
$$=-\int_0^1 x(x-1)dx+\int_1^3(x^2-x)dx$$
$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)(1-0)^3+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_1^3$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{3^3-1^3}{3}-\frac{3^2-1^2}{2}=\frac{29}{6}$$



3．放物線 $y=ax-x^2$ $(a>0)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S が $\frac{9}{2}$ になるように，定数 a の値を定めよ。

解答　$a=3$

解説

放物線と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$ax-x^2=0$　すなわち　$x(x-a)=0$

を解いて　$x=0,\ a$

$a>0$ であり，$0\leqq x\leqq a$ では，$y\geqq 0$ であるから

$$S=\int_0^a(ax-x^2)dx=-\int_0^a x(x-a)dx=\frac{a^3}{6}$$

$S=\frac{9}{2}$ であるための条件は　$\frac{a^3}{6}=\frac{9}{2}$　　よって　$a^3=27$

$a>0$ であるから　$a=3$

4．放物線 $y=-x^2+4x$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

また，この囲まれた部分が直線 $y=mx$ によって上側と下側に $1:7$ の面積比で分けられるとき，定数 m の値を求めよ。ただし，$0<m<4$とする。

解答　$S=\frac{32}{3}$，$m=2$

解説

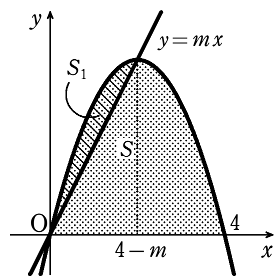
放物線 $y=-x^2+4x$ と x 軸の交点の x 座標は，

方程式　$-x^2+4x=0$　すなわち　$x^2-4x=0$

を解いて　$x=0,\ 4$

$0\leqq x\leqq 4$ では，$y\geqq 0$ であるから

$$S=\int_0^4(-x^2+4x)dx=-\int_0^4 x(x-4)dx$$
$$=\frac{1}{6}\cdot 4^3=\frac{32}{3}$$



放物線と直線 $y=mx$ で囲まれた部分の面積を S_1 とする。両者の共有点の x 座標は，

方程式　$-x^2+4x=mx$　すなわち　$x\{x-(4-m)\}=0$

を解いて　$x=0,\ 4-m$

ここで　$S_1=\int_0^{4-m}\{(-x^2+4x)-mx\}dx=-\int_0^{4-m}x\{x-(4-m)\}dx=\frac{(4-m)^3}{6}$

$S_1:S=1:8$ であるから　$8S_1=S$　すなわち　$8\cdot\frac{(4-m)^3}{6}=\frac{32}{3}$

ゆえに　$(4-m)^3=8$　　よって　$4-m=2$

したがって　$m=2$　　これは$0<m<4$を満たす。

5．放物線 $y=2x-x^2$ と x 軸で囲まれた部分の面積を直線 $y=mx$ が 2 等分するように，定数 m の値を定めよ。ただし，$0<m<2$とする。

解答　$m=2-\sqrt[3]{4}$

解説

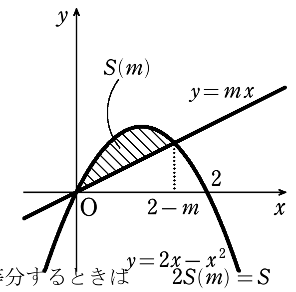
放物線 $y=2x-x^2$ と直線 $y=mx$ で囲まれた部分の面積を $S(m)$ とする。

両者の共有点の x 座標は，方程式

$2x-x^2=mx$　すなわち　$x\{x-(2-m)\}=0$

ここで　$S(m)=\int_0^{2-m}\{(2x-x^2)-mx\}dx$

$$=-\int_0^{2-m}x\{x-(2-m)\}dx=\frac{(2-m)^3}{6}$$



放物線と x 軸で囲まれた部分の面積を S とすると，2 等分するときは　$2S(m)=S$

$S=S(0)$ であるから　$2\cdot\frac{(2-m)^3}{6}=\frac{2^3}{6}$

ゆえに　$(2-m)^3=4$　　よって　$2-m=\sqrt[3]{4}$

したがって　$m=2-\sqrt[3]{4}$　（これは$0<m<2$を満たす）

6．放物線 $y=x(3-x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を，直線 $y=ax$ が 2 等分するとき，a の値を求めよ。ただし，$0<a<3$とする。

解答　$3-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$

解説

放物線 $y=x(3-x)$ …… ① と直線 $y=ax$ …… ②

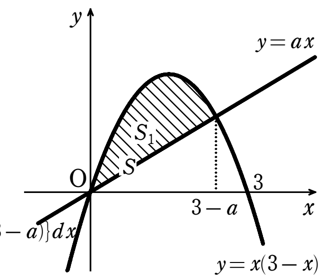
の交点の x 座標は，$x(3-x)=ax$ の解である。

これを解いて　$x\{x-(3-a)\}=0$

よって　$x=0,\ 3-a$

放物線 ① と直線 ② で囲まれた図形の面積を S_1 とすると

$$S_1=\int_0^{3-a}\{x(3-x)-ax\}dx=-\int_0^{3-a}x\{x-(3-a)\}dx$$
$$=\frac{1}{6}\{(3-a)-0\}^3=\frac{(3-a)^3}{6}$$



放物線 ① と x 軸で囲まれた図形の面積を S とすると，S は $S_1=\frac{(3-a)^3}{6}$ に $a=0$ を代入したものと等しいから　$S=\frac{9}{2}$

条件より，$S=2S_1$ であるから　$\frac{9}{2}=2\cdot\frac{(3-a)^3}{6}$

ゆえに　$(3-a)^3=\frac{27}{2}$

よって，$3-a=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ から　$a=3-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$　（これは$0<a<3$を満たす）