数学演習（面積）Ｈ２２．１２．４　　(　)組(　)番　名前(　)

１．次の曲線と 2 直線，および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1) $y=3x^2+1$，$x=1$，$x=3$　(2) $y=-x^2-2$，$x=-1$，$x=2$

(3) $y=x^2-4x+5$，$x=0$，$x=2$

２．次の放物線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1) $y=-x^2+3x$　(2) $y=x^2+2x-3$　(3) $y=-x^2+6x-8$

３．次の曲線または直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1) $y=x^2+x-4$，$y=3x-1$　(2) $y=x^2-4x+2$，$y=-x^2+2x-2$

(3) $y=x^2+x+1$，$y=2x^2-3x+1$

４．次の曲線や直線によって囲まれた部分の面積を求めよ。

(1) $y=x^2+x$，$y=6$　(2) $y=x^2-3x+3$，$y=-x^2+2$

５．連立不等式 $y\geqq x^2$，$y\leqq x+6$，$y\leqq -2x+3$ の表す領域の面積を求めよ。

６．次の曲線または直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1) $y=x^2+x$，$y=1-x$

(2) $y=|x^2-x-2|$ $(0\leqq x\leqq 3)$，$x=0$，$x=3$，x 軸

7．放物線 $y=x^2-4x+3$ と，この放物線上の点 $(4,\ 3)$，$(0,\ 3)$ における接線で囲まれた部分の面積を求めよ。

8．放物線 $y=x^2-4x+3$ を C とする。C 上の点 $(0,\ 3)$，$(6,\ 15)$ における接線をそれぞれ，ℓ_1，ℓ_2 とするとき，次のものを求めよ。

(1)　ℓ_1，ℓ_2 の方程式　　　(2)　C，ℓ_1，ℓ_2 で囲まれる図形の面積

9．放物線 $y=x^2-2x+4$ に原点 O から 2 本の接線を引くとき，放物線と接線で囲まれた部分の面積を求めよ。

10．曲線 $y=x^3-3x^2+3x-1$ と，この曲線上の点 $(0,\ -1)$ における接線で囲まれた図形の面積を求めよ。

11．(1)　曲線 $y=x^3-2x^2-x+2$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(2)　曲線 $y=x^3-5x^2+2x+6$ とその曲線上の点 $(3,\ -6)$ における接線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

12．曲線 $y=x^3-x$ と曲線上の点 $(t,\ t^3-t)$ における接線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。ただし，$t>0$ とする。

数学演習（面積）Ｈ２２．１２．４　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　）

1．次の曲線と 2 直線，および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1)　$y=3x^2+1$，$x=1$，$x=3$　　(2)　$y=-x^2-2$，$x=-1$，$x=2$

(3)　$y=x^2-4x+5$，$x=0$，$x=2$

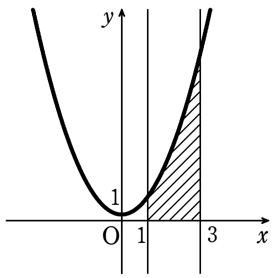
解答　(1)　28　　(2)　9　　(3)　$\frac{14}{3}$

解説

求める面積を S とする。

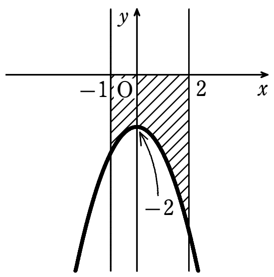
(1)　常に $y>0$ であるから

$$S=\int_1^3(3x^2+1)dx$$
$$=\left[x^3+x\right]_1^3$$
$$=(27+3)-(1+1)$$
$$=28$$



(2)　常に $y<0$ であるから

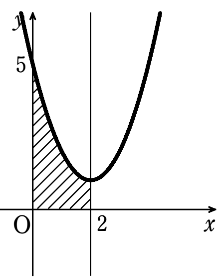
$$S=-\int_{-1}^{2}(-x^2-2)dx$$
$$=\int_{-1}^{2}(x^2+2)dx=\left[\frac{x^3}{3}+2x\right]_{-1}^{2}$$
$$=\left(\frac{8}{3}+4\right)-\left(-\frac{1}{3}-2\right)$$
$$=9$$



(3)　$y=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$

常に $y>0$ であるから

$$S=\int_0^2(x^2-4x+5)dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+5x\right]_0^2$$
$$=\frac{8}{3}-8+10=\frac{14}{3}$$



2．次の放物線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1)　$y=-x^2+3x$　　(2)　$y=x^2+2x-3$　　(3)　$y=-x^2+6x-8$

解答　(1)　$\frac{9}{2}$　　(2)　$\frac{32}{3}$　　(3)　$\frac{4}{3}$

解説

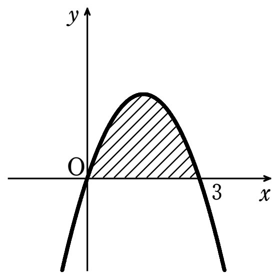
求める面積を S とする。

(1)　放物線と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$-x^2+3x=0$ を解いて　　$x=0$，3

$0\leqq x\leqq 3$ では，$y\geqq 0$ であるから

$$S=\int_0^3(-x^2+3x)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3$$
$$=-9+\frac{27}{2}=\frac{9}{2}$$



別解　[積分の計算]

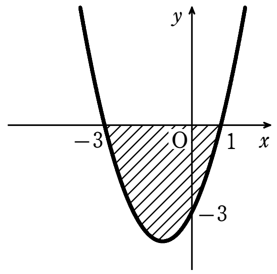
$$S=\int_0^3(-x^2+3x)dx=-\int_0^3 x(x-3)dx=\frac{1}{6}(3-0)^3=\frac{9}{2}$$

(2)　放物線と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$x^2+2x-3=0$ を解いて　　$x=-3$，1

$-3\leqq x\leqq 1$ では，$y\leqq 0$ であるから

$$S=-\int_{-3}^{1}(x^2+2x-3)dx$$
$$=-\left[\frac{x^3}{3}+x^2-3x\right]_{-3}^{1}$$
$$=-\left\{\left(\frac{1}{3}+1-3\right)-(-9+9+9)\right\}=\frac{32}{3}$$



別解　[積分の計算]

$$S=-\int_{-3}^{1}(x^2+2x-3)dx=-\int_{-3}^{1}(x+3)(x-1)dx=\frac{1}{6}\{1-(-3)\}^3=\frac{32}{3}$$

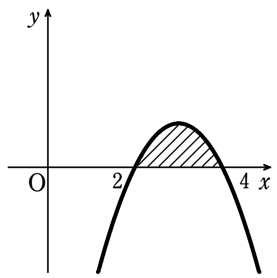
(3)　放物線と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$-x^2+6x-8=0$　すなわち　$x^2-6x+8=0$　を解いて

$x=2$，4

$2\leqq x\leqq 4$ では，$y\geqq 0$ であるから

$$S=\int_2^4(-x^2+6x-8)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+3x^2-8x\right]_2^4$$
$$=\left(-\frac{64}{3}+48-32\right)-\left(-\frac{8}{3}+12-16\right)=\frac{4}{3}$$



別解　[積分の計算]

$$S=\int_2^4(-x^2+6x-8)dx=-\int_2^4(x-2)(x-4)dx=\frac{1}{6}(4-2)^3=\frac{4}{3}$$

3．次の曲線または直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1)　$y=x^2+x-4$，$y=3x-1$　　(2)　$y=x^2-4x+2$，$y=-x^2+2x-2$

(3)　$y=x^2+x+1$，$y=2x^2-3x+1$

解答　(1)　$\frac{32}{3}$　　(2)　$\frac{1}{3}$　　(3)　$\frac{32}{3}$

解説

求める面積を S とする。

(1)　曲線と直線の交点の x 座標は，方程式

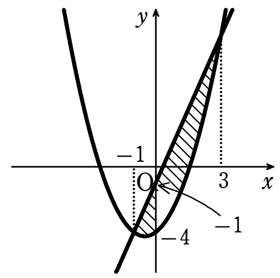
$x^2+x-4=3x-1$

すなわち　$x^2-2x-3=0$ を解いて

$x=-1$，3

$-1\leqq x\leqq 3$ では，$x^2+x-4\leqq 3x-1$ であるから

$$S=\int_{-1}^{3}\{(3x-1)-(x^2+x-4)\}dx$$
$$=-\int_{-1}^{3}(x^2-2x-3)dx$$
$$=-\left[\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right]_{-1}^{3}=-\left\{(9-9-9)-\left(-\frac{1}{3}-1+3\right)\right\}=\frac{32}{3}$$



別解　[積分の計算]

$$S=-\int_{-1}^{3}(x^2-2x-3)dx=-\int_{-1}^{3}(x+1)(x-3)dx=\frac{1}{6}\{3-(-1)\}^3=\frac{32}{3}$$

(2)　2 曲線の交点の x 座標は，方程式

$x^2-4x+2=-x^2+2x-2$

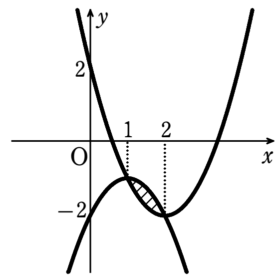
すなわち　$2x^2-6x+4=0$ を解いて

$x=1$，2

$1\leqq x\leqq 2$ では，$x^2-4x+2\leqq -x^2+2x-2$

であるから

$$S=\int_1^2\{(-x^2+2x-2)-(x^2-4x+2)\}dx$$
$$=-2\int_1^2(x^2-3x+2)dx$$
$$=-2\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_1^2=-2\left\{\left(\frac{8}{3}-6+4\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right)\right\}=\frac{1}{3}$$



別解　[積分の計算]

$$S=-2\int_1^2(x^2-3x+2)dx=-2\int_1^2(x-1)(x-2)dx=\frac{2}{6}(2-1)^3=\frac{1}{3}$$

(3)　2 曲線の交点の x 座標は，方程式

$x^2+x+1=2x^2-3x+1$

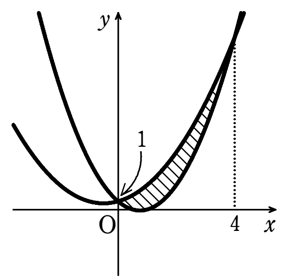
すなわち　$x^2-4x=0$ を解いて

$x=0$，4

$0\leqq x\leqq 4$ では，$x^2+x+1\geqq 2x^2-3x+1$

であるから

$$S=\int_0^4\{(x^2+x+1)-(2x^2-3x+1)\}dx$$
$$=-\int_0^4(x^2-4x)dx=-\left[\frac{x^3}{3}-2x^2\right]_0^4$$
$$=-\left(\frac{64}{3}-32\right)=\frac{32}{3}$$



別解　[積分の計算]

$$S=-\int_0^4(x^2-4x)dx=-\int_0^4 x(x-4)dx=\frac{1}{6}(4-0)^3=\frac{32}{3}$$

4．次の曲線や直線によって囲まれた部分の面積を求めよ。

(1)　$y=x^2+x$，$y=6$　　(2)　$y=x^2-3x+3$，$y=-x^2+2$

解答　(1)　$\frac{125}{6}$　　(2)　$\frac{1}{24}$

解説

求める面積を S とする。

(1)　放物線と直線の交点の x 座標は，方程式

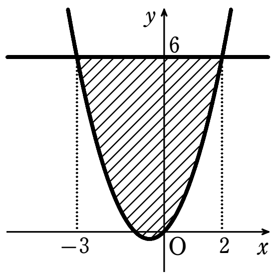
$x^2+x=6$ を解いて　　$x=-3,\ 2$

$-3\leqq x\leqq 2$ では，$x^2+x\leqq 6$ であるから

$$S=\int_{-3}^{2}\{6-(x^2+x)\}dx=-\int_{-3}^{2}(x^2+x-6)dx$$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-6x\right]_{-3}^{2}$$

$$=-\left\{\left(\frac{8}{3}+2-12\right)-\left(-9+\frac{9}{2}+18\right)\right\}=\frac{125}{6}$$



別解　[積分の計算]

$$S=-\int_{-3}^{2}(x^2+x-6)dx=-\int_{-3}^{2}(x+3)(x-2)dx=\frac{1}{6}\{2-(-3)\}^3=\frac{125}{6}$$

(2)　2 曲線の交点の x 座標は，方程式

$x^2-3x+3=-x^2+2$

すなわち　$2x^2-3x+1=0$ を解いて

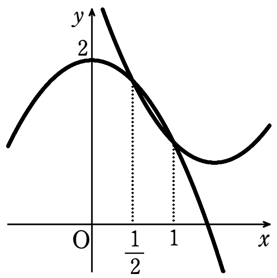
$x=\frac{1}{2},\ 1$

$\frac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ では，$x^2-3x+3\leqq -x^2+2$ であるから

$$S=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\{(-x^2+2)-(x^2-3x+3)\}dx$$

$$=-\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x^2-3x+1)dx=-\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+x\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=-\left\{\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{2}+1\right)-\left(\frac{1}{12}-\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\right)\right\}=\frac{1}{24}$$



別解　[積分の計算]

$$S=-\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x^2-3x+1)dx=-2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)dx=\frac{2}{6}\left(1-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{24}$$

5．連立不等式 $y\geqq x^2$，$y\leqq x+6$，$y\leqq -2x+3$ の表す領域の面積を求めよ。

解答　$\frac{15}{2}$

解説

放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x+6$ の交点の x 座標は，

方程式 $x^2=x+6$ すなわち $(x+2)(x-3)=0$

を解いて　　$x=-2,\ 3$

放物線 $y=x^2$ と直線 $y=-2x+3$ の交点の x 座標は，

方程式 $x^2=-2x+3$ すなわち $(x-1)(x+3)=0$

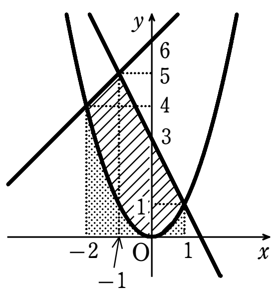
を解いて　　$x=1,\ -3$

2 直線の交点の x 座標は，方程式 $x+6=-2x+3$

を解いて　　$x=-1$

よって，連立不等式の表す領域は図の斜線部分である。

したがって，求める面積を S とすると



$$S=\int_{-2}^{-1}\{(x+6)-x^2\}dx+\int_{-1}^{1}\{(-2x+3)-x^2\}dx$$

$$=\int_{-2}^{-1}(-x^2+x+6)dx+2\int_{0}^{1}(-x^2+3)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+6x\right]_{-2}^{-1}+2\left[-\frac{x^3}{3}+3x\right]_{0}^{1}$$

$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-6\right)-\left(\frac{8}{3}+2-12\right)+2\left(-\frac{1}{3}+3\right)=\frac{15}{2}$$

別解　A$(-1,\ 5)$，B$(-1,\ 0)$，C$(1,\ 0)$，D$(1,\ 1)$，E$(-2,\ 0)$，F$(-2,\ 4)$ とするとき，(台形ABCD と台形 ABEF の面積の和)$-$(図の黒く塗った部分の面積) を計算すると，求める面積が得られる。つまり

$$\frac{1}{2}\cdot(5+1)\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot(4+5)\cdot 1-\int_{-2}^{1}x^2dx=6+\frac{9}{2}-\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1}=\frac{15}{2}$$

6．次の曲線または直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1)　$y=x^2+x$，$y=1-x$

(2)　$y=|x^2-x-2|$ $(0\leqq x\leqq 3)$，$x=0$，$x=3$，x 軸

解答　(1)　$\frac{8\sqrt{2}}{3}$　(2)　$\frac{31}{6}$

解説

求める面積を S とする。

(1)　曲線と直線の交点の x 座標は，方程式

$x^2+x=1-x$　すなわち　$x^2+2x-1=0$

を解いて　　$x=-1\pm\sqrt{2}$

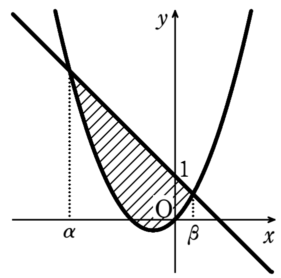
$\alpha=-1-\sqrt{2}$，$\beta=-1+\sqrt{2}$ とおくと，

$\alpha\leqq x\leqq\beta$ では，$1-x\geqq x^2+x$ であるから

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\{(1-x)-(x^2+x)\}dx$$

$$=-\int_{\alpha}^{\beta}(x^2+2x-1)dx=-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(2\sqrt{2})^3=\frac{8\sqrt{2}}{3}$$



(2)　$|x^2-x-2|=|(x+1)(x-2)|$ であるから

$0\leqq x\leqq 2$ のとき　$y=-(x^2-x-2)$

$2\leqq x\leqq 3$ のとき　$y=x^2-x-2$

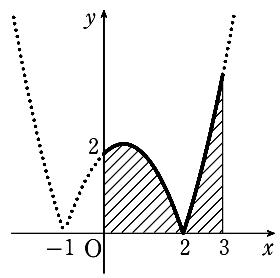
よって，求める面積は

$$S=-\int_{0}^{2}(x^2-x-2)dx+\int_{2}^{3}(x^2-x-2)dx$$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_{0}^{2}+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_{2}^{3}$$

$$=-\left(\frac{8}{3}-2-4\right)+\left\{\left(9-\frac{9}{2}-6\right)-\left(\frac{8}{3}-2-4\right)\right\}$$

$$=\frac{31}{6}$$



7．放物線 $y=x^2-4x+3$ と，この放物線上の点 $(4,\ 3)$，$(0,\ 3)$ における接線で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答　$\frac{16}{3}$

解説

$y=x^2-4x+3$ について

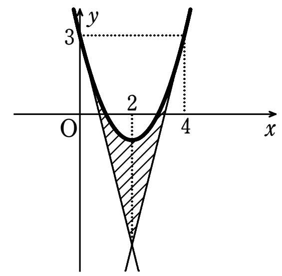
$y'=2x-4$

点 $(4,\ 3)$ における接線の方程式は

$y-3=4(x-4)$　　すなわち　　$y=4x-13$

点 $(0,\ 3)$ における接線の方程式は

$y-3=-4(x-0)$　すなわち　　$y=-4x+3$



この 2 つの接線の交点の x 座標は，方程式

$4x-13=-4x+3$ を解いて　　$x=2$

グラフから，求める面積は

$$\int_{0}^{2}\{(x^2-4x+3)-(-4x+3)\}dx+\int_{2}^{4}\{(x^2-4x+3)-(4x-13)\}dx$$

$$=\int_{0}^{2}x^2dx+\int_{2}^{4}(x^2-8x+16)dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2}+\left[\frac{x^3}{3}-4x^2+16x\right]_{2}^{4}$$

$$=\frac{8}{3}+\left(\frac{64}{3}-64+64\right)-\left(\frac{8}{3}-16+32\right)=\frac{16}{3}$$

別解　放物線と 2 つの接線で囲まれた部分は，直線 $x=2$ について対称であるから，その面積は

$$2\int_{0}^{2}\{(x^2-4x+3)-(-4x+3)\}dx=2\int_{0}^{2}x^2dx=2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2}=\frac{16}{3}$$

参考　$\int(x+a)^2dx=\frac{(x+a)^3}{3}+C$　(C は積分定数) を利用すると

$$\int_{2}^{4}(x^2-8x+16)dx=\int_{2}^{4}(x-4)^2dx=\left[\frac{(x-4)^3}{3}\right]_{2}^{4}=\frac{(4-4)^3}{3}-\frac{(2-4)^3}{3}=\frac{8}{3}$$

8．放物線 $y=x^2-4x+3$ を C とする。C 上の点 $(0,\ 3)$，$(6,\ 15)$ における接線をそれぞれ，ℓ_1，ℓ_2 とするとき，次のものを求めよ。

(1)　ℓ_1，ℓ_2 の方程式　　　　(2)　C，ℓ_1，ℓ_2 で囲まれる図形の面積

解答　(1)　順に　$y=-4x+3$，$y=8x-33$　　(2)　18

解説

(1)　$y=x^2-4x+3$ から　　$y'=2x-4$

ℓ_1 の方程式は　　$y-3=(2\cdot 0-4)(x-0)$

すなわち　　　$y=-4x+3$

ℓ_2 の方程式は　　$y-15=(2\cdot 6-4)(x-6)$

すなわち　　　$y=8x-33$

(2)　ℓ_1，ℓ_2 の交点の x 座標は，$-4x+3=8x-33$ を解くと　　$12x-36=0$

ゆえに　　$x=3$

よって，求める面積 S は

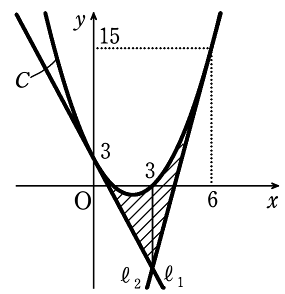
$$S=\int_{0}^{3}\{(x^2-4x+3)-(-4x+3)\}dx$$

$$+\int_{3}^{6}\{(x^2-4x+3)-(8x-33)\}dx$$

$$=\int_{0}^{3}x^2dx+\int_{3}^{6}(x-6)^2dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{3}+\left[\frac{(x-6)^3}{3}\right]_{3}^{6}$$

$$=9+9=18$$



9．放物線 $y=x^2-2x+4$ に原点Oから2本の接線を引くとき，放物線と接線で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答　$\dfrac{16}{3}$

解説

接点をPとし，その x 座標を t とする。

$y=x^2-2x+4$ より，$y'=2x-2$ であるから，点Pにおける接線の方程式は

$$y-(t^2-2t+4)=(2t-2)(x-t)$$

すなわち　　$y=2(t-1)x-t^2+4$

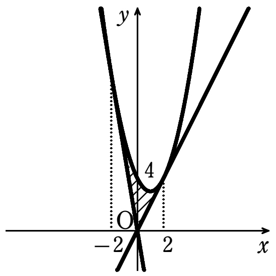
これが原点を通るから　　$0=2(t-1)\cdot 0-t^2+4$

これを解いて　　$t=\pm 2$

よって，接線の方程式は　　$t=-2$ のとき　$y=-6x$

$t=2$　のとき　$y=2x$

求める面積を S とすると，図から



$$S=\int_{-2}^{0}\{(x^2-2x+4)-(-6x)\}dx$$
$$+\int_{0}^{2}\{(x^2-2x+4)-2x\}dx$$
$$=\int_{-2}^{0}(x^2+4x+4)dx+\int_{0}^{2}(x^2-4x+4)dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}+2x^2+4x\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right]_{0}^{2}$$
$$=0-\left(-\frac{8}{3}+8-8\right)+\left(\frac{8}{3}-8+8\right)$$
$$=\frac{16}{3}$$

参考　[積分の計算]

$$S=\int_{-2}^{0}(x^2+4x+4)dx+\int_{0}^{2}(x^2-4x+4)dx=\int_{-2}^{0}(x+2)^2dx+\int_{0}^{2}(x-2)^2dx$$
$$=\left[\frac{(x+2)^3}{3}\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_{0}^{2}=\frac{8}{3}+\left\{0-\left(-\frac{8}{3}\right)\right\}=\frac{16}{3}$$

10．曲線 $y=x^3-3x^2+3x-1$ と，この曲線上の点 $(0,\ -1)$ における接線で囲まれた図形の面積を求めよ。

解答　$\dfrac{27}{4}$

解説

$y=x^3-3x^2+3x-1$ について　　$y'=3x^2-6x+3$

点 $(0,\ -1)$ における接線の方程式は

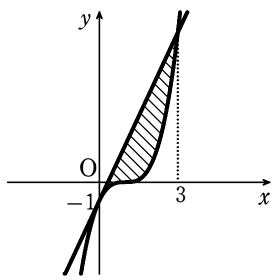
$y+1=3(x-0)$　すなわち　$y=3x-1$

この接線と曲線の共有点の x 座標は，方程式

$x^3-3x^2+3x-1=3x-1$　すなわち　$x^2(x-3)=0$

を解いて　　$x=0,\ 3$

求める面積を S とすると，グラフから



$$S=\int_{0}^{3}\{(3x-1)-(x^3-3x^2+3x-1)\}dx$$
$$=\int_{0}^{3}(-x^3+3x^2)dx=\left[-\frac{x^4}{4}+x^3\right]_{0}^{3}=\frac{27}{4}$$

11．(1)　曲線 $y=x^3-2x^2-x+2$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(2)　曲線 $y=x^3-5x^2+2x+6$ とその曲線上の点 $(3,\ -6)$ における接線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

解答　(1)　$\dfrac{37}{12}$　　(2)　$\dfrac{64}{3}$

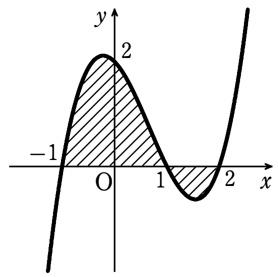
解説

(1)　$x^3-2x^2-x+2=x^2(x-2)-(x-2)=(x^2-1)(x-2)$

$=(x+1)(x-1)(x-2)$

よって，曲線と x 軸の交点の x 座標は　　$x=\pm 1,\ 2$

したがって，図から，求める面積は



$$S=\int_{-1}^{1}(x^3-2x^2-x+2)dx+\int_{1}^{2}\{-(x^3-2x^2-x+2)\}dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(-2x^2+2)dx-\int_{1}^{2}(x^3-2x^2-x+2)dx$$
$$=2\cdot 2\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_{0}^{1}-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{1}^{2}$$
$$=\frac{8}{3}-\frac{2}{3}+\frac{13}{12}=\frac{37}{12}$$

(2)　$y'=3x^2-10x+2$ であるから，接線の方程式は

$y-(-6)=(3\cdot 3^2-10\cdot 3+2)(x-3)$

すなわち　　$y=-x-3$

この接線と曲線の共有点の x 座標は，

$x^3-5x^2+2x+6=-x-3$

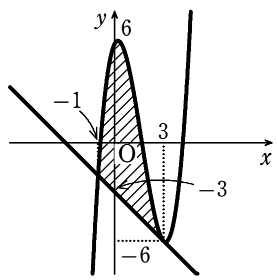
すなわち　$x^3-5x^2+3x+9=0$　の解である。

左辺が $(x-3)^2$ を因数にもつことに注意して，因数分解

すると　　$(x-3)^2(x+1)=0$

よって　　$x=3,\ -1$

したがって，図から，求める面積は



$$S=\int_{-1}^{3}\{(x^3-5x^2+2x+6)-(-x-3)\}dx=\int_{-1}^{3}(x-3)^2(x+1)dx$$
$$=\int_{-1}^{3}(x-3)^2\{(x-3)+4\}dx=\int_{-1}^{3}\{(x-3)^3+4(x-3)^2\}dx$$
$$=\left[\frac{(x-3)^4}{4}\right]_{-1}^{3}+4\left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_{-1}^{3}=-64+\frac{256}{3}=\frac{64}{3}$$

12．曲線 $y=x^3-x$ と曲線上の点 $(t,\ t^3-t)$ における接線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。ただし，$t>0$ とする。

解答　$\dfrac{27}{4}t^4$

解説

$y'=3x^2-1$ であるから，点 $(t,\ t^3-t)$ における接線の方程式は

$y-(t^3-t)=(3t^2-1)(x-t)$　すなわち　$y=(3t^2-1)x-2t^3$　……①

この接線と曲線の共有点の x 座標は，$x^3-x=(3t^2-1)x-2t^3$ すなわち

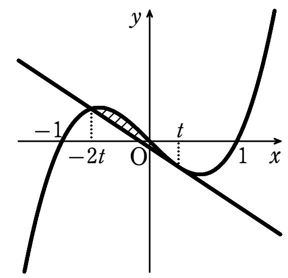
$x^3-3t^2x+2t^3=0$ の解である。

左辺が $(x-t)^2$ を因数にもつことに注意して，因数分解すると　　$(x-t)^2(x+2t)=0$

よって　　$x=t,\ -2t$

$t>0$ のとき，$-2t\leqq x\leqq t$ では曲線の方が直線よりも上なので

よって，図から，面積は



$$S=\int_{-2t}^{t}[x^3-x-\{(3t^2-1)x-2t^3\}]dx$$
$$=\int_{-2t}^{t}(x^3-3t^2x+2t^3)dx$$
$$=\int_{-2t}^{t}(x-t)^2(x+2t)dx$$
$$=\int_{-2t}^{t}(x-t)^2\{(x-t)+3t\}dx$$
$$=\int_{-2t}^{t}(x-t)^3dx+3t\int_{-2t}^{t}(x-t)^2dx$$
$$=\left[\frac{(x-t)^4}{4}\right]_{-2t}^{t}+3t\left[\frac{(x-t)^3}{3}\right]_{-2t}^{t}$$
$$=-\frac{81}{4}t^4+3t\cdot 9t^3=\frac{27}{4}t^4$$