数学演習（積分方程式•面積）Ｈ２２．１１．２７　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1．等式 $f(x)=3x^2-x+\int_{-1}^{1}f(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

2．次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x)=2x^2+1+\int_0^1 xf(t)\,dt$$

3．等式 $\int_a^x f(t)\,dt=3x^2-2x-1$ を満たす関数 $f(x)$，および定数 a の値を求めよ。

4．等式 $f(x)=1+2\int_0^1(xt+1)f(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

5．(1)　関数 $g(x)=\int_x^2 t(1-t)\,dt$ を微分せよ。

(2)　次の等式を満たす関数 $f(x)$ および定数 a の値を求めよ。

（ア）$\int_a^x f(t)\,dt=x^2+5x-6$　　（イ）$\int_1^x tf(t)\,dt=x^3+2x^2+a$

6．関数 $f(x)=\int_{-1}^{x}(2t^2-3t+1)\,dt$ の極値を求めよ。

7．次の関数 $f(x)$ の $-3 \leqq x \leqq 3$ における最大値と最小値を求めよ。

$$f(x)=\int_{-3}^{x}(t^2+t-2)dt$$

8．次の曲線，直線と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1)　$y=x^2-x-2$

(2)　$y=-x^2+3x\ (-1 \leqq x \leqq 2)$，$x=-1$，$x=2$

9．次の曲線や直線で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1)　$y=-x^2+3x+2$，$y=x-1$　　(2)　$y=x^2+1$，$y=-x^2+x+2$

10．関数 $y=2x^3-x^2-2x+1$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

11．次の曲線，直線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=2x^2-2x-2$　　(2)　$y=-2x^2-3x+2$

(3)　$y=x^2-4x-5\ (x \leqq 4)$，$x=-2$，$x=4$

1．等式 $f(x)=3x^2-x+\int_{-1}^{1}f(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

解答　$f(x)=3x^2-x-2$

解説

$\int_{-1}^{1}f(t)\,dt$ は定数であるから，$\int_{-1}^{1}f(t)\,dt=k$ とおくと

$$f(x)=3x^2-x+k$$

よって　$k=\int_{-1}^{1}f(t)\,dt=\int_{-1}^{1}(3t^2-t+k)dt=2\int_{0}^{1}(3t^2+k)dt$

$$=2\Big[t^3+kt\Big]_0^1=2(1+k)$$

すなわち　$k=2(1+k)$　　これを解いて　$k=-2$

したがって　$f(x)=3x^2-x-2$

2．次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x)=2x^2+1+\int_{0}^{1}xf(t)\,dt$$

解答　$f(x)=2x^2+\frac{10}{3}x+1$

解説

注意　積分の中にxが入っていたら外に出すこと

x は積分変数 t に無関係であるから　$\int_0^1 xf(t)\,dt=x\int_0^1 f(t)\,dt$

$\int_0^1 f(t)\,dt$ は定数であるから，$\int_0^1 f(t)\,dt=k$ とおくと

$$f(x)=2x^2+1+xk$$

よって　$k=\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1(2t^2+kt+1)dt=\left[\frac{2}{3}t^3+\frac{k}{2}t^2+t\right]_0^1$

$$=\frac{2}{3}+\frac{k}{2}+1$$

すなわち　$k=\frac{k}{2}+\frac{5}{3}$　　これを解いて　$k=\frac{10}{3}$

したがって　$f(x)=2x^2+\frac{10}{3}x+1$

3．等式 $\int_a^x f(t)\,dt=3x^2-2x-1$ を満たす関数 $f(x)$，および定数 a の値を求めよ。

解答　$f(x)=6x-2$；$a=1,\ -\frac{1}{3}$

解説

等式の両辺の関数を x で微分すると　$f(x)=6x-2$

また，与えられた等式で $x=a$ とおくと，左辺は 0 になるから

$$0=3a^2-2a-1$$

ゆえに　$(a-1)(3a+1)=0$　　よって　$a=1,\ -\frac{1}{3}$

4．等式 $f(x)=1+2\int_0^1(xt+1)f(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

解答　$f(x)=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$

解説

注意　$\int_0^1 f(t)dt$ と $\int_0^1 tf(t)dt$ は中身が違うから計算結果も違う。よって別々の文字でおく

右辺を変形して　$f(x)=1+2\int_0^1(xt+1)f(t)\,dt$

$$=1+2\int_0^1\{xtf(t)+f(t)\}dt$$

$$=1+2\left\{\int_0^1 xtf(f)dt+\int_0^1 f(t)dt\right\}$$

$$=1+2\left\{x\int_0^1 tf(f)dt+\int_0^1 f(t)dt\right\}$$

$$=1+2x\int_0^1 tf(t)dt+2\int_0^1 f(t)dt$$

つまり　$f(x)=1+2x\int_0^1 tf(t)\,dt+2\int_0^1 f(t)\,dt$　となる。

$\int_0^1 tf(t)\,dt=a$，$\int_0^1 f(t)\,dt=b$ とおくと，a，b は定数であり

$$f(x)=2ax+2b+1$$

よって　$a=\int_0^1 t(2at+2b+1)dt=\int_0^1\{2at^2+(2b+1)t\}dt$

$$=\left[\frac{2}{3}at^3+\frac{2b+1}{2}t^2\right]_0^1$$

$$=\frac{2}{3}a+\frac{2b+1}{2}$$

ゆえに　$a=\frac{2}{3}a+\frac{2b+1}{2}$　より　$2a-6b-3=0$　……①

一方　$b=\int_0^1(2at+2b+1)dt=\Big[at^2+(2b+1)t\Big]_0^1$

$$=a+2b+1$$

よって　$b=a+2b+1$　より　$a+b+1=0$　……②

①，② を連立して解くと　$a=-\frac{3}{8}$，$b=-\frac{5}{8}$

ゆえに　$f(x)=2\left(-\frac{3}{8}\right)x+2\left(-\frac{5}{8}\right)+1=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$

5．(1)　関数 $g(x)=\int_x^2 t(1-t)dt$ を微分せよ。

(2)　次の等式を満たす関数 $f(x)$ および定数 a の値を求めよ。

（ア）$\int_a^x f(t)\,dt=x^2+5x-6$　　　（イ）$\int_1^x tf(t)\,dt=x^3+2x^2+a$

解答　(1)　$g'(x)=x^2-x$

(2)（ア）$f(x)=2x+5$；$a=1,\ -6$　　（イ）$f(x)=3x+4$，$a=-3$

解説

注意　微分して中身が出てくるのは $\int_a^x f(t)dt$ のように上端がxのときである。

$\int_x^a f(t)dt$ のように下端にxがあったら，$\int_x^a f(t)dt=-\int_a^x f(x)dt$ と変形する

(1)　$g(x)=-\int_2^x t(1-t)\,dt$　であるから

$$g'(x)=-x(1-x)=x^2-x$$

(2)（ア）$\int_a^x f(t)\,dt=x^2+5x-6$ ……① とする。

① の両辺を x で微分すると　$f(x)=2x+5$

また，① において $x=a$ とおくと，左辺は 0 になるから

$$0=a^2+5a-6\quad すなわち\quad (a-1)(a+6)=0$$

これを解いて　$a=1,\ -6$

（イ）$\int_1^x tf(t)\,dt=x^3+2x^2+a$ ……① とする。

① の両辺を x で微分すると　$xf(x)=3x^2+4x$

したがって，$f(x)=3x+4$

また，① において $x=1$ とおくと，左辺は 0 になるから

$0=1+2+a$　　よって　$a=-3$

6．関数 $f(x)=\int_{-1}^x(2t^2-3t+1)dt$ の極値を求めよ。

解答　$x=\frac{1}{2}$ で極大値 $\frac{27}{8}$，$x=1$ で極小値 $\frac{10}{3}$

解説

ヒント　微分すると積分の中身が出てくる

$f'(x)=2x^2-3x+1=(x-1)(2x-1)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=\frac{1}{2}$，1

よって，$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	……	$\frac{1}{2}$	……	1	……
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

また　$f(x)=\int_{-1}^x(2t^2-3t+1)dt=\left[\frac{2}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+t\right]_{-1}^x$

$$=\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+x+\frac{19}{6}$$

ゆえに　$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+\frac{19}{6}=\frac{27}{8}$

$$f(1)=\frac{2}{3}\cdot1^3-\frac{3}{2}\cdot1^2+1+\frac{19}{6}=\frac{10}{3}$$

よって，$f(x)$ は，$x=\frac{1}{2}$ で極大値 $\frac{27}{8}$ をとり，$x=1$ で極小値 $\frac{10}{3}$ をとる。

7．次の関数 $f(x)$ の $-3\leqq x\leqq3$ における最大値と最小値を求めよ。

$$f(x)=\int_{-3}^x(t^2+t-2)dt$$

解答　$x=3$ で最大値 6，$x=1$ で最小値 $-\frac{8}{3}$

解説

$f'(x)=x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=1,\ -2$

$-3\leqq x\leqq3$ における $f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	極大	↘	極小	↗	6

また　$f(x)=\left[\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}-2t\right]_{-3}^{x}=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x-\frac{3}{2}$

したがって　$f(-2)=-\frac{8}{3}+2+4-\frac{3}{2}=\frac{11}{6}$

$f(1)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2-\frac{3}{2}=-\frac{8}{3}$

$f(3)=9+\frac{9}{2}-6-\frac{3}{2}=6$

よって，$x=3$ で最大値 6，$x=1$ で最小値 $-\frac{8}{3}$ をとる。

8．次の曲線，直線と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

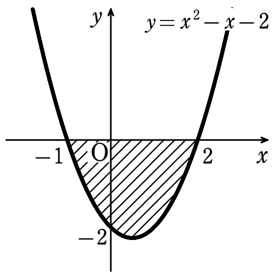
(1)　$y=x^2-x-2$

(2)　$y=-x^2+3x\ (-1\leqq x\leqq 2)$，$x=-1$，$x=2$

解答　(1)　$\frac{9}{2}$　　(2)　$\frac{31}{6}$

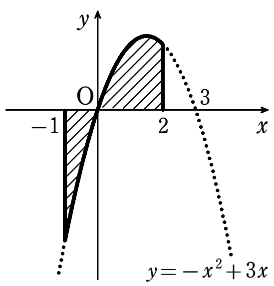
解説

(1)　曲線 $y=x^2-x-2$ と x 軸の交点の x 座標は，
$x^2-x-2=0$ の解である。
これを解いて　$(x+1)(x-2)=0$
よって　$x=-1,\ 2$
$-1\leqq x\leqq 2$ において $y\leqq 0$ であるから，求める面積 S は



$$S=-\int_{-1}^{2}(x^2-x-2)dx=-\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)dx$$
$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{2-(-1)\}^3=\frac{9}{2}$$

(2)　曲線 $y=-x^2+3x$ と x 軸の交点の x 座標は，
$-x^2+3x=0$　すなわち　$x^2-3x=0$ の解である。
これを解いて　$x(x-3)=0$
よって　$x=0,\ 3$
$-1\leqq x\leqq 0$ において x軸よりも下，$0\leqq x\leqq 2$ において x軸よりも上 であるから，求める面積 S は



$$S=-\int_{-1}^{0}(-x^2+3x)dx+\int_{0}^{2}(-x^2+3x)dx$$
$$=-\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{2}$$
$$=-\left\{-\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right)\right\}+\left(-\frac{8}{3}+6\right)=\frac{31}{6}$$

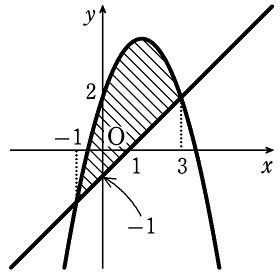
9．次の曲線や直線で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1)　$y=-x^2+3x+2$，$y=x-1$　　(2)　$y=x^2+1$，$y=-x^2+x+2$

解答　(1)　$\frac{32}{3}$　　(2)　$\frac{9}{8}$

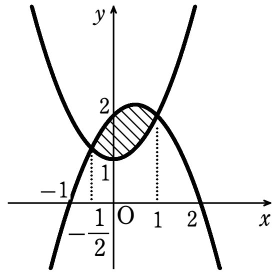
解説

(1)　放物線と直線の交点の x 座標は，
$-x^2+3x+2=x-1$　すなわち　$x^2-2x-3=0$
の解である。
これを解いて　$(x+1)(x-3)=0$
よって　$x=-1,\ 3$
ゆえに，右の図から求める面積 S は



$$S=\int_{-1}^{3}\{(-x^2+3x+2)-(x-1)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)dx$$
$$=-\int_{-1}^{3}(x+1)(x-3)dx=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{3-(-1)\}^3=\frac{1}{6}\cdot 4^3=\frac{32}{3}$$

(2)　2 曲線の交点の x 座標は，$x^2+1=-x^2+x+2$
すなわち $2x^2-x-1=0$ の解である。
これを解いて　$(2x+1)(x-1)=0$
よって　$x=-\frac{1}{2},\ 1$
ゆえに，右の図から求める面積 S は



$$S=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\{(-x^2+x+2)-(x^2+1)\}dx$$
$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(-2x^2+x+1)dx$$
$$=-\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(2x+1)(x-1)dx$$
$$=-2\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)dx$$
$$=-2\left(-\frac{1}{6}\right)\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}^3=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{9}{8}$$

10．関数 $y=2x^3-x^2-2x+1$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

解答　$\frac{71}{48}$

解説

曲線 $y=2x^3-x^2-2x+1$ と x 軸の交点の x 座標は，$2x^3-x^2-2x+1=0$ の解である。

$f(x)=2x^3-x^2-2x+1$ とすると　$f(1)=2-1-2+1=0$

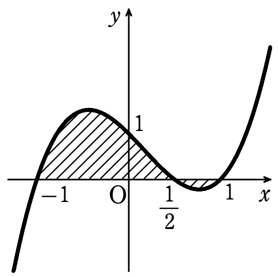
よって　$f(x)=(x-1)(2x^2+x-1)$
$=(x-1)(x+1)(2x-1)$

$f(x)=0$ を解いて　$x=1,\ -1,\ \frac{1}{2}$

また，曲線は右の図のようになり

$-1\leqq x\leqq\frac{1}{2}$ において　x軸より上，

$\frac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ において　x軸より下



ゆえに，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(2x^3-x^2-2x+1)dx-\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x^3-x^2-2x+1)dx$$
$$=\left[\frac{x^4}{2}-\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}-\left[\frac{x^4}{2}-\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$
$$=2\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right\}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$$
$$=\frac{71}{48}$$

11．次の曲線，直線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

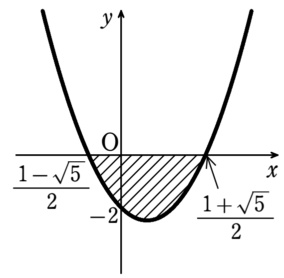
(1)　$y=2x^2-2x-2$　　(2)　$y=-2x^2-3x+2$

(3)　$y=x^2-4x-5\ (x\leqq 4)$，$x=-2$，$x=4$

解答　(1)　$\frac{5\sqrt{5}}{3}$　　(2)　$\frac{125}{24}$　　(3)　$\frac{110}{3}$

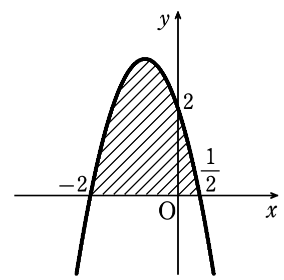
解説

(1)　曲線と x 軸の交点の x 座標は，
$2x^2-2x-2=0$ を解くと　$x^2-x-1=0$　より
$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$
図から，求める面積は



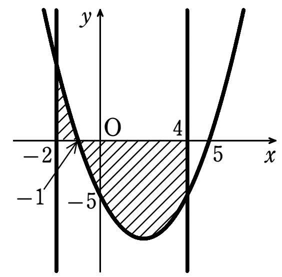
$$S=-\int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}(2x^2-2x-2)dx$$
$$=-2\int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}(x^2-x-1)dx$$
$$=-2\left(-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3=\frac{5\sqrt{5}}{3}$$

(2)　曲線と x 軸の交点の x 座標は，
$-2x^2-3x+2=0$ を解くと
$(x+2)(2x-1)=0$ から　$x=-2,\ \frac{1}{2}$
図から，求める面積は



$$S=\int_{-2}^{\frac{1}{2}}(-2x^2-3x+2)dx$$
$$=-2\left(-\frac{1}{6}\right)\left\{\frac{1}{2}-(-2)\right\}^3=\frac{125}{24}$$

(3)　曲線と x 軸の交点の x 座標は，
$x^2-4x-5=0$ を解くと　$x=-1,\ 5$
図から，求める面積は



$$S=\int_{-2}^{-1}(x^2-4x-5)dx-\int_{-1}^{4}(x^2-4x-5)dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2-5x\right]_{-2}^{-1}-\left[\frac{x^3}{3}-2x^2-5x\right]_{-1}^{4}$$
$$=2\cdot\frac{8}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{92}{3}\right)=\frac{110}{3}$$