数学演習（積分方程式）Ｈ２４．６．２２　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１．等式 $f(x)=x+\dfrac{1}{2}\int_0^1 f(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

２．次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(1) $f(x)=x+\int_0^2 f(t)\,dt$　　(2) $f(x)=\int_0^2\{3x^2-xf(t)\}dt$

３．次の x の関数を微分せよ。

(1) $\int_0^x (2t-1)dt$　　(2) $\int_1^x (t^2-3t+4)dt$　　(3) $\int_x^{-2}(t^3-2t+1)dt$

４．次の等式が任意の x に対して成り立つとき，関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

(1) $\int_a^x f(t)\,dt=x^2-3x-4$　　(2) $\int_1^x f(t)\,dt=2x^2-3x+a$

５．次の関数 $f(x)$ の極値を求めよ。

(1) $f(x)=\int_1^x (t^2-1)dt$　　(2) $f(x)=\int_{-1}^x (3t^2+4t+1)dt$

６．$0\leqq x\leqq 4$ のとき，関数 $f(x)=\int_0^x (t-1)(t-3)dt$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

７．等式 $f(x)=x^2\int_{-1}^0 f(t)\,dt+x\int_0^2 f(t)\,dt+1$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

数学演習（積分方程式）Ｈ２４．６．２２　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　）

1．等式 $f(x)=x+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

解答　$f(x)=x+\dfrac{1}{2}$

解説

$a=\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ とおくと　　$f(x)=x+\dfrac{1}{2}a$

ゆえに　　$a=\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1\left(t+\frac{1}{2}a\right)dt=\left[\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}at\right]_0^1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a$

よって　$a=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}a$　より　$a=1$　　　したがって　　$f(x)=x+\dfrac{1}{2}$

2．次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(1)　$f(x)=x+\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt$　　　　(2)　$f(x)=\displaystyle\int_0^2\{3x^2-xf(t)\}dt$

解答　(1)　$f(x)=x-2$　　(2)　$f(x)=6x^2-\dfrac{16}{3}x$

解説

(1)　$a=\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt$ とおくと　　$f(x)=x+a$

ゆえに　　$\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt=\int_0^2(t+a)dt=\left[\frac{t^2}{2}+at\right]_0^2=2+2a$

よって　　　$a=2+2a$

これを解いて　　$a=-2$

したがって　　$f(x)=x-2$

(2)　$f(x)=3x^2\times\displaystyle\int_0^2 1\,dt-x\times\int_0^2 f(t)\,dt=3x^2\times2-x\times\int_0^1 f(t)\,dt=6x^2-x\int_0^2 f(t)\,dt$

$a=\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt$ とおくと　　$f(x)=6x^2-ax$

ゆえに　　$\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt=\int_0^2(6t^2-at)dt=\left[2t^3-\frac{a}{2}t^2\right]_0^2=16-2a$

よって　　　$a=16-2a$

これを解いて　　$a=\dfrac{16}{3}$

したがって　　$f(x)=6x^2-\dfrac{16}{3}x$

参考　インテグラルの中にxが入っていたら、上記のように外へ出す。

3．次の x の関数を微分せよ。

(1)　$\displaystyle\int_0^x(2t-1)dt$　　　(2)　$\displaystyle\int_1^x(t^2-3t+4)dt$　　　(3)　$\displaystyle\int_x^{-2}(t^3-2t+1)dt$

解答　(1)　$2x-1$　　(2)　x^2-3x+4　　(3)　$-x^3+2x-1$

解説

参考　下端が定数、上端がx、中身がtの式である定積分を微分すると、「中身のtがxに変身したもの」が出てくる。「$\dfrac{d}{dx}$△」は「△を微分せよ」という命令の記号。

(1)　$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x(2t-1)dt=2x-1$

(2)　$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^x(t^2-3t+4)dt=x^2-3x+4$

(3)　$\displaystyle\int_x^{-2}(t^3-2t+1)dt=-\int_{-2}^x(t^3-2t+1)dt$ であるから

$$\frac{d}{dx}\int_x^{-2}(t^3-2t+1)dt=-\frac{d}{dx}\int_{-2}^x(t^3-2t+1)dt=-(x^3-2x+1)$$
$$=-x^3+2x-1$$

4．次の等式が任意の x に対して成り立つとき，関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=x^2-3x-4$　　　　(2)　$\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt=2x^2-3x+a$

解答　(1)　$f(x)=2x-3$；$a=-1,\ 4$　　(2)　$f(x)=4x-3$；$a=1$

解説

(1)　等式の両辺を x で微分すると　　$f(x)=2x-3$

また，与えられた等式で $x=a$ とおくと，左辺は 0 になるから

$0=a^2-3a-4$

ゆえに　　$(a+1)(a-4)=0$

よって　　$a=-1,\ 4$

(2)　等式の両辺を x で微分すると　　$f(x)=4x-3$

また，与えられた等式で $x=1$ とおくと，左辺は 0 になるから

$0=2-3+a$

よって　　$a=1$

5．次の関数 $f(x)$ の極値を求めよ。

(1)　$f(x)=\displaystyle\int_1^x(t^2-1)dt$　　　　(2)　$f(x)=\displaystyle\int_{-1}^x(3t^2+4t+1)dt$

解答　(1)　$x=-1$ のとき極大値 $\dfrac{4}{3}$，$x=1$ のとき極小値 0

(2)　$x=-1$ のとき極大値 0，$x=-\dfrac{1}{3}$ のとき極小値 $-\dfrac{4}{27}$

解説

(1)　$f'(x)=\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^x(t^2-1)dt=x^2-1=(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\pm1$

また　　$f(x)=\left[\dfrac{t^3}{3}-t\right]_1^x=\dfrac{x^3}{3}-x+\dfrac{2}{3}$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 $\dfrac{4}{3}$	↘	極小 0	↗

よって，$x=-1$ のとき極大値 $\dfrac{4}{3}$，

$x=1$ のとき極小値 0　をとる。

(2)　$f'(x)=\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{-1}^x(3t^2+4t+1)dt=3x^2+4x+1=(x+1)(3x+1)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=-1,\ -\dfrac{1}{3}$

また　　$f(x)=\left[t^3+2t^2+t\right]_{-1}^x=x^3+2x^2+x$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\dfrac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 0	↘	極小 $-\dfrac{4}{27}$	↗

よって，$x=-1$ のとき極大値 0,

$x=-\dfrac{1}{3}$ のとき極小値 $-\dfrac{4}{27}$　をとる。

6．$0\leqq x\leqq4$ のとき，関数 $f(x)=\displaystyle\int_0^x(t-1)(t-3)dt$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

解答　$x=1,\ 4$ のとき最大値 $\dfrac{4}{3}$；$x=0,\ 3$ のとき最小値 0

解説

$f'(x)=\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x(t-1)(t-3)dt=(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=1,\ 3$

また　　$f(x)=\displaystyle\int_0^x(t^2-4t+3)dt=\left[\frac{t^3}{3}-2t^2+3t\right]_0^x=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x$

$0\leqq x\leqq4$ における $f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\dfrac{4}{3}$	↘	0	↗	$\dfrac{4}{3}$

よって，$x=1,\ 4$ のとき最大値 $\dfrac{4}{3}$，

$x=0,\ 3$ のとき最小値 0　をとる。

7．等式 $f(x)=x^2\displaystyle\int_{-1}^0 f(t)\,dt+x\int_0^2 f(t)\,dt+1$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

解答　$f(x)=-3x^2+6x+1$

解説

$a=\displaystyle\int_{-1}^0 f(t)\,dt$，$b=\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt$ とおくと　　$f(x)=ax^2+bx+1$

ゆえに　　$a=\displaystyle\int_{-1}^0 f(t)\,dt=\int_{-1}^0(at^2+bt+1)dt=\left[\frac{a}{3}t^3+\frac{b}{2}t^2+t\right]_{-1}^0=\frac{a}{3}-\frac{b}{2}+1$

よって　　$a=\dfrac{a}{3}-\dfrac{b}{2}+1$

すなわち　　$4a+3b=6$　……①

また　　$b=\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt=\int_0^2(at^2+bt+1)dt=\left[\frac{a}{3}t^3+\frac{b}{2}t^2+t\right]_0^2=\frac{8}{3}a+2b+2$

よって　　$b=\dfrac{8}{3}a+2b+2$

すなわち　　$8a+3b=-6$　……②

①，② を解いて　　$a=-3,\ b=6$

したがって　　$f(x)=-3x^2+6x+1$