数学演習（積分法）Ｈ２０．１２．９　　　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

１．次の不定積分･定積分を求めよ。

(1) $\int (t+1)(t-2)^3 dt$

(2) $\int_{-1}^{2}(x^3-x+1)dx+\int_{1}^{2}(x-1-x^3)dx$

２．次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。また(2)は a の値も求めよ。

(1) $f(x)=x^2+\int_0^1(2t-x)f(t)dt$

(2) $\int_x^a\{f(t)+t^2\}dt=x^3-ax$

３．次の２曲線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1) $y=|x^2-1|$ ， $y=x+1$

(2) $x=y^2-3y+3$ ， $x=-y^2+2y+2$

４．２つの放物線 $y=-x^2+2x$…①， $y=ax^2$…②について，放物線①と x 軸で囲まれた部分の面積を放物線②が二等分するとき，定数 a の値を求めよ。ただし，$a>0$ とする。

５．放物線 $y=x^2-x+3$…①について，点 $(1,\ -1)$ から放物線①に引いた２本の接線と放物線①で囲まれた部分の面積を求めよ。

6．放物線 $y=x^2+x-1$ と原点を通る直線とで囲まれた部分の面積を最小にするような直線の方程式を求めよ。また，そのときの面積を求めよ。

7．曲線C: $y=x^3-3x$ 上の点P(t, t^3-3t) における接線を l とする。曲線 C と直線 l で囲まれた部分の面積を t で表せ。ただし，$t>0$ とする。

8．曲線 $y=x(x-a)(x-a^2)$ と x 軸で囲まれた２つの部分の面積が等しくなるように，定数 a の値を定めよ。ただし，$0<a<1$ とする。

数学演習（積分法）Ｈ２０．１２．９　　　　（　　）組（　　）番　名前（ こたん 　　）

1．次の不定積分・定積分を求めよ。

(1) $\int (t+1)(t-2)^3 dt$

$= \int \{(t-2)+3\}(t-2)^3 dt$

$= \int \{(t-2)^4 + 3(t-2)^3\} dt$

$= \frac{1}{5}(t-2)^5 + \frac{3}{4}(t-2)^4 + C$

$= \frac{1}{20}(t-2)^4\{4(t-2)+15\} + C$

$= \frac{1}{20}(t-2)^4(4t+7) + C$

(2) $\int_{-1}^{2}(x^3-x+1)dx+\int_{1}^{2}(x-1-x^3)dx$

$= \int_{-1}^{2}(x^3-x+1)dx + \int_{2}^{1}(x^3-x+1)dx$

$= \int_{-1}^{1}(x^3-x+1)dx$

$= 2\int_{0}^{1} 1\cdot dx$

$= 2[x]_0^1 = 2$

2．次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。また(2)は a の値も求めよ。

(1) $f(x)=x^2+\int_0^1(2t-x)f(t)dt = x^2 - x\int_0^1 f(t)dt + 2\int_0^1 tf(t)dt$

$a=\int_0^1 f(t)dt$，$b=\int_0^1 tf(t)dt$ とおくと $f(x)=x^2-ax+2b$

ここで

$a=\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 (t^2-at+2b)dt = \left[\frac13t^3-\frac12at^2+2bt\right]_0^1 = \frac13-\frac12a+2b$

∴ $a=\frac13-\frac12a+2b$ …①

$b=\int_0^1 tf(t)dt = \int_0^1 t(t^2-at+2b)dt = \left[\frac14t^4-\frac13at^3+bt^2\right]_0^1 = \frac14-\frac13a+b$

∴ $b=\frac14-\frac13a+b$ …②

①②より $a=\frac34$，$b=\frac{23}{24}$　∴ $f(x)=x^2-\frac34x+\frac{23}{12}$

(2) $\int_x^a\{f(t)+t^2\}dt = x^3-ax$ (＊)　よって $a=0, 1$

$\int_a^x\{f(t)+t^2\}dt = -x^3+ax$

$x=a$を代入すると

$\int_a^a\{f(t)+t^2\}dt = -a^3+a\cdot a$

∴ $0=-a^3+a^2$

⇔ $a^2(a-1)=0$

また(＊)式の両辺微分して

$f(x)+x^2=-3x^2+a$

∴ $f(x)=-4x^2+a$

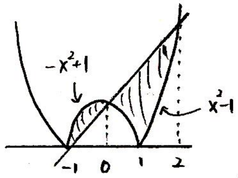
以上より

$a=0$ の時 $f(x)=-4x^2$

$a=1$ の時 $f(x)=-4x^2+1$

3．次の２曲線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1) $y=|x^2-1|$，$y=x+1$



$S=\int_{-1}^{0}\{(-x^2+1)-(x+1)\}dx + \int_0^1\{(x+1)-(-x^2+1)\}dx + \int_1^2\{(x+1)-(x^2-1)\}dx$

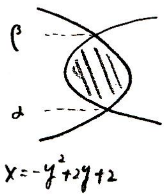
$=\int_{-1}^{0}(-x^2-x)dx+\int_0^1(x^2+x)dx+\int_1^2(-x^2+x+2)dx$

$=\left[-\frac13x^3-\frac12x^2\right]_{-1}^0+\left[\frac13x^3+\frac12x^2\right]_0^1+\left[-\frac13x^3+\frac12x^2+2x\right]_1^2$

$=-\frac13+\frac12+\frac13+\frac12+\left(-\frac83+2+4\right)-\left(-\frac13+\frac12+2\right)$

$=\frac{13}{6}$

(2) $x=y^2-3y+3$，$x=-y^2+2y+2$



$S=\int_\alpha^\beta\{(-y^2+2y+2)-(y^2-3y+3)\}dy$

$=-2\int_\alpha^\beta\left(y^2-\frac52y+\frac12\right)dy$

$=-2\int_\alpha^\beta(y-\alpha)(y-\beta)dy$

$=-2\left(-\frac16\right)(\beta-\alpha)^3$

$=\frac13\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^3=\frac{17\sqrt{17}}{24}$

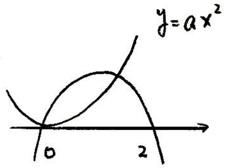
交点は

$y^2-3y+3=-y^2+2y+2$

$2y^2-5y+1=0$

$y=\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}$ (以下 α, β とおく)

4．２つの放物線 $y=-x^2+2x$…①，$y=ax^2$…②について，放物線①と x 軸で囲まれた部分の面積を放物線②が二等分するとき，定数 a の値を求めよ。ただし，$a>0$ とする。



①とx軸で囲まれた部分の面積は

$\int_0^2(-x^2+2x)dx$

$=-\int_0^2 x(x-2)dx = \frac16\cdot2^3$ …(＊)

また①と②で囲まれた部分の面積を考えると，①と②の交点は

$ax^2=-x^2+2x$

$x\{(a+1)x-2\}=0$　∴ $x=0, \frac{2}{a+1}$

よって面積は

$\int_0^{\frac{2}{a+1}}\{(-x^2+2x)-ax^2\}dx$

$=-(a+1)\int_0^{\frac{2}{a+1}}x\left(x-\frac{2}{a+1}\right)dx$

$=(a+1)\cdot\frac16\left(\frac{2}{a+1}\right)^3$

$=\frac{2^3}{6}\cdot\frac{1}{(a+1)^2}$

この面積が(＊)の半分になるので

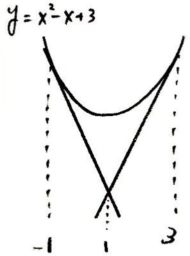
$\frac{2^3}{6}\cdot\frac{1}{(a+1)^2}=\frac12\cdot\frac{2^3}{6}$

∴ $(a+1)^2=2$

$a=-1\pm\sqrt2$

$a>0$ より $a=-1+\sqrt2$

5．放物線 $y=x^2-x+3$…①について，点$(1, -1)$ から放物線①に引いた２本の接線と放物線①で囲まれた部分の面積を求めよ。



放物線①上の点(t, t^2-t+3)における接線は

$y-(t^2-t+3)=(2t-1)(x-t)$

これが点$(1,-1)$を通るので

$-1-(t^2-t+3)=(2t-1)(1-t)$

∴ $t^2-2t-3=0$

$(t-3)(t+1)=0$　∴ $t=3, -1$

$t=-1$ の時 $y-5=-3(x+1)$　∴ $y=-3x+2$

$t=3$ の時 $y-9=5(x-3)$　∴ $y=5x-6$

よって

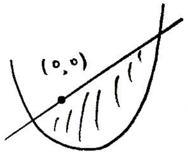
$S=\int_{-1}^{1}\{(x^2-x+3)-(-3x+2)\}dx+\int_1^3\{(x^2-x+3)-(5x-6)\}dx$

$=\int_{-1}^{1}(x^2+2x+1)dx+\int_1^3(x^2-6x+9)dx$

$=\int_{-1}^{1}(x+1)^2dx+\int_1^3(x-3)^2dx=\left[\frac13(x+1)^3\right]_{-1}^1+\left[\frac13(x-3)^3\right]_1^3$

$=\frac{16}{3}$

6. 放物線 $y=x^2+x-1$ と原点を通る直線とで囲まれた部分の面積を最小にするような直線の方程式を求めよ。また，そのときの面積を求めよ。



原点を通る直線の方程式を

$$y=mx$$

とおく。この時交点のX座標は

$$mx=x^2+x-1$$

$$\Leftrightarrow x^2+(1-m)x-1=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{m-1\pm\sqrt{(m-1)^2+4}}{2}$$

よって以下 $\alpha=\frac{m-1+\sqrt{(m-1)^2+4}}{2}$，$\beta=\frac{m-1-\sqrt{(m-1)^2+4}}{2}$

とおくと直線と放物線で囲まれた部分の面積は

$$S=\int_\alpha^\beta\{mx-(x^2+x-1)\}dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta\{x^2+(1-m)x-1\}dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

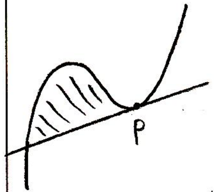
$$=\frac{1}{6}\left(\sqrt{(m-1)^2+4}\right)^3$$

となる。この時 S は $m=1$ の時 最小値 $\frac{1}{6}(\sqrt{4})^3$

をとる。以上より

$y=x$ の時 最小値 $\frac{4}{3}$ をとる

7. 曲線C: $y=x^3-3x$ 上の点P(t, t^3-3t) における接線を l とする。曲線Cと直線 l で囲まれた部分の面積を t で表せ。ただし，$t>0$ とする。



点P(t, t^3-3t) における接線 l の方程式は $y'=3x^2-3$ より

$$y-(t^3-3t)=(3t^2-3)(x-t)$$

$$\therefore\ y=(3t^2-3)(x-t)+(t^3-3t)$$

これと $y=x^3-3x$ の交点を求めると $x=t$ で接していることから連立した方程式

$$x^3-3x=(3t^2-3)(x-t)+(t^3-3t)$$

は $x=t$ を重解に持つ。つまり

$$x^3-3x-(3t^2-3)(x-t)-(t^3-3t)=0$$

の左辺は $(x-t)^2$ で割り切れるので，実際割り算をすると

$$(x-t)^2(x+2t)=0 \quad \therefore\ x=t,-2t$$

となる。よって面積 S は

$$S=\int_{-2t}^{t}\{(x^3-3x)-(3t^2-3)(x-t)-(t^3-3t)\}dx$$

$$=\int_{-2t}^{t}(x-t)^2(x+2t)dx$$

$$=\int_{-2t}^{t}(x-t)^2\{(x-t)+3t\}dx$$

$$=\int_{-2t}^{t}\{(x-t)^3+3t(x-t)^2\}dx$$

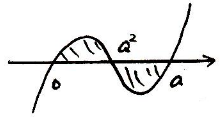
$$=\left[\frac{1}{4}(x-t)^4+t(x-t)^3\right]_{-2t}^{t}$$

$$=-\frac{1}{4}(-3t)^4-t(-3t)^3$$

$$=-\frac{81}{4}t^4+27t^4=\frac{27}{4}t^4$$

8. 曲線 $y=x(x-a)(x-a^2)$ と x 軸で囲まれた２つの部分の面積が等しくなるように，定数 a の値を定めよ。ただし，$0<a<1$ とする。

$0<a<1$ より $a^2<a$ である。



よって $\int_0^{a^2}x(x-a)(x-a^2)dx=-\int_{a^2}^{a}x(x-a)(x-a^2)dx$

$$\Leftrightarrow \int_0^{a^2}x(x-a)(x-a^2)dx+\int_{a^2}^{a}x(x-a)(x-a^2)dx=0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{a}x(x-a)(x-a^2)dx=0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{a}\{x^3-(a^2+a)x^2+a^3x\}dx=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a^2+a)x^3+\frac{1}{2}a^3x^2\right]_0^a=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}a^4-\frac{1}{3}(a^2+a)a^3+\frac{1}{2}a^3a^2=0$$

$$\Leftrightarrow a^4\left\{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}(a+1)+\frac{1}{2}a\right\}=0$$

$a\neq 0$ より

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{3}(a+1)+\frac{1}{2}a=0$$

$$\therefore\ a=\frac{1}{2}$$

($0<a<1$ を満たす)