数学演習（積分法）Ｈ２６．１０．２７　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

１．次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (x^2-6x+4)dx$　　(2) $\int (2t+1)(t-3)dt$

(3) $\int (x+2)^3 dx - \int (x-2)^3 dx$

２．$f'(x)=(2x-4)(1-3x)$ で $f(1)=0$ となる関数 $f(x)$ を求めよ。

３．不定積分 $\int (x-1)^2(x+1)dx$ を求めよ。

４．次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-1}^{2}(4x^2-x+3)dx$　　(2) $\int_{-1}^{2}(2x^2+3x)dx-\int_{-1}^{2}x(2x+1)dx$

(3) $\int_{-3}^{3}(3x^2-4x)dx-\int_{4}^{3}x(3x-4)dx$

５．定積分 $\int_{-2}^{2}(x-1)(2x^2-3x+1)dx$ を求めよ。

６．$\int_{a}^{x}f(t)dt=\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{2}{3}$ のとき，$f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

７．次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(1) $f(x)=2x^2+x\int_0^1 f(t)dt$　　(2) $f(x)=2x+\int_0^1 (x+t)f(t)dt$

８．公式 $\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を用いて，次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-\frac{1}{2}}^{3}(2x+1)(x-3)dx$　　(2) $\int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}}(x^2-4x+1)dx$

9．関数 $f(x)=\int_1^x(4t^2-8t+3)dt$ の極値を求め，グラフをかけ。

10. 次の曲線，直線と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1)　$y=2x^2-4x-4$　　(2)　$y=-2x^2+4x+6$

(3)　$y=4-x^2\ (0\leqq x\leqq 1)$，$y$ 軸，$x=1$　　(4)　$y=x^2-4x+3$，$x=0$，$x=5$

11. 次の曲線や直線で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1)　$y=x^2-4x-2$，$y=-2x+1$　　(2)　$y=2x^2+3x+1$，$y=-x^2-2x+3$

12. 関数 $y=2x^3-x^2-2x+1$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

１．次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (x^2-6x+4)dx$　　(2) $\int (2t+1)(t-3)dt$

(3) $\int (x+2)^3dx-\int (x-2)^3dx$

解答　(1) $\frac{x^3}{3}-3x^2+4x+C$（Cは積分定数）

(2) $\frac{2}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2-3t+C$（$C$は積分定数）　(3) $4x^3+16x+C$（Cは積分定数）

解説

(1) $\int (x^2-6x+4)dx=\int x^2dx-6\int xdx+4\int dx=\frac{x^3}{3}-3x^2+4x+C$（$C$は積分定数）

(2) $\int (2t+1)(t-3)dt=\int (2t^2-5t-3)dt=\frac{2}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2-3t+C$（$C$は積分定数）

(3) $\int (x+2)^3dx-\int (x-2)^3dx=\int \{(x+2)^3-(x-2)^3\}dx$　（中身どうしをまとめる）

$=\int \{(x^3+6x^2+12x+8)-(x^3-6x^2+8x-8)\}=\int (12x^2+16)dx$

$=4x^3+16x+C$（Cは積分定数）

２．$f'(x)=(2x-4)(1-3x)$ で $f(1)=0$ となる関数 $f(x)$ を求めよ。

解答　$f(x)=-2x^3+7x^2-4x-1$

解説

$f(x)=\int f'(x)dx=\int (2x-4)(1-3x)dx$

$=\int (-6x^2+14x-4)dx=-2x^3+7x^2-4x+C$（$C$は積分定数）

$f(1)=0$ から　$f(1)-2+7-4+C=0$

よって　$C=-1$　したがって　$f(x)=-2x^3+7x^2-4x-1$

３．不定積分 $\int (x-1)^2(x+1)dx$ を求めよ。

解答　$\frac{1}{12}(x-1)^3(3x+5)+C$（$C$は積分定数）

解説

$\int (x-1)^2(x+1)dx=\int (x-1)^2\{(x-1)+2\}dx=\int \{(x-1)^3+2(x-1)^2\}dx$　（分配法則）

$=\int (x-1)^3dx+2\int (x-1)^2dx=\frac{1}{4}(x-1)^4+2\times\frac{1}{3}(x-1)^3+C$

$=\frac{3}{12}(x-1)^4+\frac{8}{12}(x-1)^3+C$

$=\frac{1}{12}(x-1)^3\{3(x-1)+8\}+C$　←$\frac{1}{12}(x-1)^3$でくくった

$=\frac{1}{12}(x-1)^3(3x+5)+C$（$C$は積分定数）

４．次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-1}^{2}(4x^2-x+3)dx$　　(2) $\int_{-1}^{2}(2x^2+3x)dx-\int_{-1}^{2}x(2x+1)dx$

(3) $\int_{-3}^{3}(3x^2-4x)dx-\int_{4}^{3}x(3x-4)dx$

解答　(1) $\frac{39}{2}$　(2) 3　(3) 77

解説

(1) $\int_{-1}^{2}(4x^2-x+3)dx=\left[\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_{-1}^{2}$

$=\left(\frac{4}{3}\cdot 2^3-\frac{1}{2}\cdot 2^2+3\cdot 2\right)-\left\{\frac{4}{3}(-1)^3-\frac{1}{2}(-1)^2+3(-1)\right\}=\frac{39}{2}$

(2) $\int_{-1}^{2}(2x^2+3x)dx-\int_{-1}^{2}x(2x+1)dx$　積分区間が同じなので、中身をまとめる

$=\int_{-1}^{2}\{(2x^2+3x)-(2x^2+x)\}dx=\int_{-1}^{2}2xdx=\left[x^2\right]_{-1}^{2}=4-1=3$

(3) $\int_{-3}^{3}(3x^2-4x)dx-\int_{4}^{3}x(3x-4)dx$　積分区間をひっくり返して

$=\int_{-3}^{3}(3x^2-4x)dx+\int_{3}^{4}(3x^2-4x)dx$　-3から3を経由して4まで積分している

$=\int_{-3}^{4}(3x^2-4x)dx=\left[x^3-2x^2\right]_{-3}^{4}=(64-32)-(-27-18)=77$

５．定積分 $\int_{-2}^{2}(x-1)(2x^2-3x+1)dx$ を求めよ。

解答　$-\frac{92}{3}$

解説

$\int_{-2}^{2}(x-1)(2x^2-3x+1)dx=\int_{-2}^{2}(2x^3-5x^2+4x-1)dx$　xの奇数乗は消える

$=2\int_{0}^{2}(-5x^2-1)dx=-2\left[\frac{5}{3}x^3+x\right]_{0}^{2}$

$=-2\left(\frac{40}{3}+2\right)=-\frac{92}{3}$

６．$\int_{a}^{x}f(t)dt=\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{2}{3}$ のとき，$f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

解答　$f(x)=3x-2$,　$a=\frac{2}{3}$

解説

$\int_{a}^{x}f(t)dt=\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{2}{3}$ …… ① とする。

① の両辺を x で微分すると　$f(x)=3x-2$

また，① で $x=a$ とおくと，左辺は 0 になるから

$0=\frac{3}{2}a^2-2a+\frac{2}{3}$　すなわち　$9a^2-12a+4=0$

よって　$(3a-2)^2=0$　したがって　$a=\frac{2}{3}$

７．次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(1) $f(x)=2x^2+x\int_{0}^{1}f(t)dt$　　(2) $f(x)=2x+\int_{0}^{1}(x+t)f(t)dt$

解答　(1) $f(x)=2x^2+\frac{4}{3}x$　(2) $f(x)=-12x-8$

解説

(1) $\int_{0}^{1}f(t)dt=k$ …①とおくと　$f(x)=2x^2+kx$

よって　①の左辺$=\int_{0}^{1}f(t)dt=\int_{0}^{1}(2t^2+kt)dt=\left[\frac{2}{3}t^3+\frac{k}{2}t^2\right]_{0}^{1}=\frac{2}{3}+\frac{k}{2}$

ゆえに①式は　$\frac{2}{3}+\frac{k}{2}=k$　よって　$k=\frac{4}{3}$

したがって　$f(x)=2x^2+\frac{4}{3}x$

(2) $f(x)=2x+\int_{0}^{1}\{xf(t)+tf(t)\}dt=2x+x\int_{0}^{1}f(t)dt+\int_{0}^{1}tf(t)dt$

$\int_{0}^{1}f(t)dt=a$ …①，$\int_{0}^{1}tf(t)dt=b$ …②　とおくと

$f(x)=2x+ax+b=(2+a)x+b$ …③

よって　①の左辺$=\int_{0}^{1}f(t)dt=\int_{0}^{1}\{(2+a)t+b\}dt=\left[\frac{2+a}{2}t^2+bt\right]_{0}^{1}=\frac{2+a}{2}+b$

ゆえに①式は　$\frac{2+a}{2}+b=a$　よって　$a-2b=2$ …… ①'

また　②式の左辺$=\int_{0}^{1}tf(t)dt=\int_{0}^{1}t\{(2+a)t+b\}dt=\int_{0}^{1}\{(2+a)t^2+bt\}dt$

$=\left[\frac{2+a}{3}t^3+\frac{b}{2}t^2\right]_{0}^{1}=\frac{2+a}{3}+\frac{b}{2}$

ゆえに②式は　$\frac{2+a}{3}+\frac{b}{2}=b$　よって　$2a-3b=-4$ …… ②'

①'，②' を連立させて解くと　$a=-14$，$b=-8$

したがって③に代入して　$f(x)=-12x-8$

８．公式 $\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を用いて，次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-\frac{1}{2}}^{3}(2x+1)(x-3)dx$　　(2) $\int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}}(x^2-4x+1)dx$

解答　(1) $-\frac{343}{24}$　(2) $-4\sqrt{3}$

解説

(1) $\int_{-\frac{1}{2}}^{3}(2x+1)(x-3)dx=2\int_{-\frac{1}{2}}^{3}\left\{x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}(x-3)dx$　x^2の係数を１にする

$=2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\left\{3-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}^3=-\frac{343}{24}$

(2) $x^2-4x+1=0$ を解くと　$x=2\pm\sqrt{3}$　であるから，無理矢理因数分解すると

$x^2-4x+1=\{x-(2-\sqrt{3})\}\{x-(2+\sqrt{3})\}$ であるから

$\int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}}(x^2-4x+1)dx=\int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}}\{x-(2-\sqrt{3})\}\{x-(2+\sqrt{3})\}dx$

$=-\frac{1}{6}\{(2+\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})\}^3=-4\sqrt{3}$

参考　$\{x-(2-\sqrt{3})\}\{x-(2+\sqrt{3})\}$を展開してみると

$\{x-(2-\sqrt{3})\}\{x-(2+\sqrt{3})\}=(x-2+\sqrt{3})(x-2-\sqrt{3})$　$x-2$をまとまりと考えて

$=(x-2)^2-(\sqrt{3})^2=x^2-4x+4-3=x^2-4x+1$

９．関数 $f(x)=\int_{1}^{x}(4t^2-8t+3)dt$ の極値を求め，グラフをかけ。

解答　$x=\frac{1}{2}$ で極大値 $\frac{1}{3}$，$x=\frac{3}{2}$ で極小値 $-\frac{1}{3}$；[グラフは下図を参照]

解説

$f'(x)$を求めるために$f(x)$を微分するが，$f(x)=\int_{1}^{x}(4t^2-8t+3)dt$であるから，これは公式が使える形である。$\int_{1}^{x}(4t^2-8t+3)dt$ をxで微分すると，中身を取り出すことができるので，$f'(x)=4x^2-8x+3$　となる。以下，増減表を書いていく。

$f'(x)=4x^2-8x+3=(2x-1)(2x-3)$　より

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\frac{1}{2}，\frac{3}{2}$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	……	$\frac{1}{2}$	……	$\frac{3}{2}$	……
$f'(x)$	＋	0	－	0	＋
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

また　　$f(x)=\int_1^x(4t^2-8t+3)dt$

$=\left[\frac{4}{3}t^3-4t^2+3t\right]_1^x$

$=\frac{4}{3}x^3-4x^2+3x-\frac{1}{3}$　　←結局は$f(x)$をxの式で表すことになる。

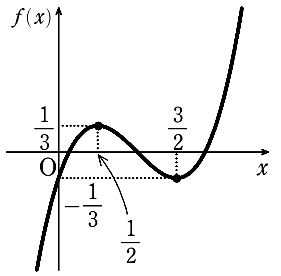
よって　　$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3-4\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3-4\left(\frac{3}{2}\right)^2+3\cdot\frac{3}{2}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$

ゆえに，$f(x)$ は，$x=\frac{1}{2}$ で極大値 $\frac{1}{3}$，

$x=\frac{3}{2}$ で極小値 $-\frac{1}{3}$　をとる。

また，グラフは右の図のようになる。



10. 次の曲線，直線と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1)　$y=2x^2-4x-4$　　(2)　$y=-2x^2+4x+6$

(3)　$y=4-x^2$ $(0\leqq x\leqq 1)$，y 軸，$x=1$　　(4)　$y=x^2-4x+3$，$x=0$，$x=5$

解答　(1)　$8\sqrt{3}$　　(2)　$\frac{64}{3}$　　(3)　$\frac{11}{3}$　　(4)　$\frac{28}{3}$

解説

(1)　曲線 $y=2x^2-4x-4$ と x 軸の交点の x 座標は，$2x^2-4x-4=0$ すなわち $x^2-2x-2=0$ の解である。解の公式より　　$x=1\pm\sqrt{3}$

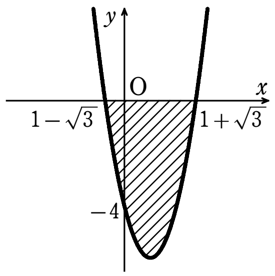
$1-\sqrt{3}\leqq x\leqq 1+\sqrt{3}$ においてx軸より下側であるから，求める面積 S は

$S=\int_{1-\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}\{-(2x^2-4x-4)\}dx$

$=-2\int_{1-\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}(x^2-2x-2)dx$

$=-2\int_{1-\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}\{x-(1-\sqrt{3})\}\{x-(1+\sqrt{3})\}dx$

$=-2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\{(1+\sqrt{3})-(1-\sqrt{3})\}^3=\frac{1}{3}\cdot 8\cdot 3\sqrt{3}=8\sqrt{3}$



(2)　曲線 $y=-2x^2+4x+6$ と x 軸の交点の x 座標は，$-2x^2+4x+6=0$ すなわち $x^2-2x-3=0$ の解である。

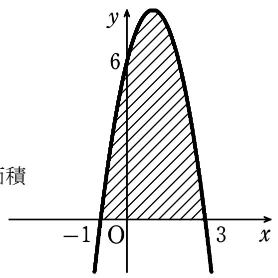
これを解いて　　$(x+1)(x-3)=0$

よって　　$x=-1，3$

$-1\leqq x\leqq 3$ において x軸より上側であるから，求める面積 S は

$S=\int_{-1}^{3}(-2x^2+4x+6)dx$

$=-2\int_{-1}^{3}(x+1)(x-3)dx$

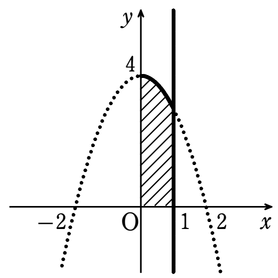


$=-2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\{3-(-1)\}^3=\frac{64}{3}$

(3)　求める部分はx軸よりも上側なので面積 S は，右の図から

$S=\int_0^1(4-x^2)dx=\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1$

$=4-\frac{1}{3}=\frac{11}{3}$



(4)　曲線 $y=x^2-4x+3$ と x 軸の交点の x 座標は，$x^2-4x+3=0$ の解である。

これを解いて　　$(x-1)(x-3)=0$

よって　　$x=1，3$

求める面積 S は，右の図から

３つの部分をそれぞれ求め，最後に足したものである。

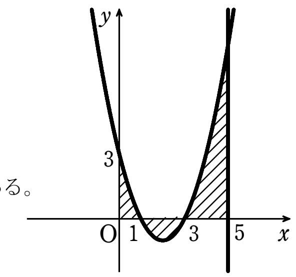
$1\leqq x\leqq 3$の部分のみx軸よりも下側なので

$S=\int_0^1(x^2-4x+3)dx+\int_1^3\{-(x^2-4x+3)\}dx$

$+\int_3^5(x^2-4x+3)dx$

$=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_0^1+\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x\right]_1^3+\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_3^5$

$=\frac{28}{3}$　　←計算は各自頑張ること



11. 次の曲線や直線で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1)　$y=x^2-4x-2$，$y=-2x+1$　　(2)　$y=2x^2+3x+1$，$y=-x^2-2x+3$

解答　(1)　$\frac{32}{3}$　　(2)　$\frac{343}{54}$

解説

(1)　放物線 $y=x^2-4x-2$ と直線 $y=-2x+1$ の交点の x 座標は，$x^2-4x-2=-2x+1$ すなわち $x^2-2x-3=0$ の解である。

よって　　$(x+1)(x-3)=0$

ゆえに　　$x=-1，3$

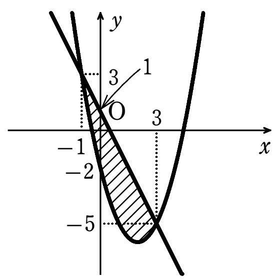
右の図から，直線の方が放物線よりも上側にあるので求める面積 S は

$S=\int_{-1}^{3}\{(-2x+1)-(x^2-4x-2)\}dx$

$=-\int_{-1}^{3}(x^2-2x-3)dx$

$=-\int_{-1}^{3}(x+1)(x-3)dx$

$=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{3-(-1)\}^3=\frac{32}{3}$



(2)　放物線 $y=2x^2+3x+1$ と $y=-x^2-2x+3$ の交点の x 座標は，$2x^2+3x+1=-x^2-2x+3$ すなわち $3x^2+5x-2=0$ の解である。

よって　　$(x+2)(3x-1)=0$

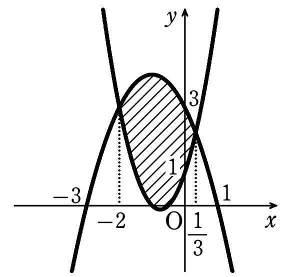
ゆえに　　$x=-2，\frac{1}{3}$

右の図から，$y=-x^2-2x+3$の方が上側なので求める面積 S は

$S=\int_{-2}^{\frac{1}{3}}\{(-x^2-2x+3)-(2x^2+3x+1)\}dx$

$=-\int_{-2}^{\frac{1}{3}}(3x^2+5x-2)dx=-\int_{-2}^{\frac{1}{3}}(x+2)(3x-1)dx$

$=-3\int_{-2}^{\frac{1}{3}}(x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right)dx=-3\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\left\{\frac{1}{3}-(-2)\right\}^3=\frac{343}{54}$



12. 関数 $y=2x^3-x^2-2x+1$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

解答　$\frac{71}{48}$

解説

曲線 $y=2x^3-x^2-2x+1$ と x 軸の交点の x 座標は，$2x^3-x^2-2x+1=0$ の解である。

$f(x)=2x^3-x^2-2x+1$ とすると　　$f(1)=2-1-2+1=0$

したがって，$f(x)$は$x-1$で割り切れるので

よって　　$f(x)=(x-1)(2x^2+x-1)$

$=(x-1)(x+1)(2x-1)$

$f(x)=0$ を解いて　　$x=1，-1，\frac{1}{2}$

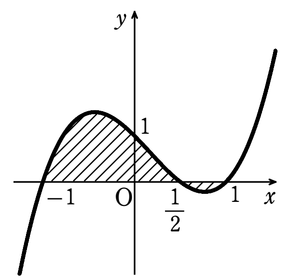
したがって，x軸との交点と，x^3の係数から

$y=(x-1)(x+1)(2x+1)$のグラフを書くと

曲線は右の図のようになる。つまり，

$-1\leqq x\leqq\frac{1}{2}$ において　x軸よりも上側，

$\frac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ において　　x軸よりも下側



ゆえに，求める面積 S は，それぞれの部分を別々に求めて、最後に足せばいいので

$S=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(2x^3-x^2-2x+1)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\{-(2x^3-x^2-2x+1)\}dx$

$=\left[\frac{x^4}{2}-\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}-\left[\frac{x^4}{2}-\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$

$=\frac{71}{48}$