数学演習（積分法）Ｈ２４．１０．６　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　）

１．次の不定積分を求めよ。

(1) $\int(-3)dx$　(2) $\int(4x-1)dx$　(3) $\int 3(x+2)dx$

(4) $\int(3x^2-2)dx$　(5) $\int(t^2+2t)dt$　(6) $\int(6x^2-2x+5)dx$

２．次の不定積分を求めよ。

(1) $\int(x+1)(x-3)dx$　(2) $\int(2t+1)(3t-2)dt$

(3) $\int(x-4)^2dx$　(4) $\int(3y+2)^2dy$

３．次の条件を満たす関数 $F(x)$ を求めよ。

(1) $F'(x)=4x-4$, $F(1)=1$　(2) $F'(x)=3(x+1)(x-2)$, $F(0)=1$

４．次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^3(-2)dx$　(2) $\int_2^4(x-3)dx$　(3) $\int_2^3(3x^2-5)dx$

(4) $\int_0^1(x^2-2x-3)dx$　(5) $\int_{-1}^3 6(x+2)(x-1)dx$　(6) $\int_{-2}^2(x+2)^2dx$

５．次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-2}^4(2x+1)dx+\int_{-2}^4(3x^2-x)dx$　(2) $\int_2^0(x^2+1)dx$

(3) $\int_0^1(x^2-2x)dx+\int_1^3(x^2-2x)dx$　(4) $\int_{-2}^4 3x^2dx-\int_1^4 3x^2dx$

６．次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-2}^3(3x^2-6x+1)dx$　(2) $\int_{-1}^1(2x^2-5x+3)dx$

(3) $\int_{-1}^2(x^2+x)dx+\int_1^{-1}(x^2+x)dx$

7. 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(1) $f(x)=x+\int_0^2 f(t)\,dt$　　(2) $f(x)=\int_0^2\{3x^2-xf(t)\}dt$

8. 次の x の関数を微分せよ。

(1) $\int_0^x(2t-1)dt$　　(2) $\int_1^x(t^2-3t+4)dt$　　(3) $\int_x^{-2}(t^3-2t+1)dt$

9. 次の等式が任意の x に対して成り立つとき，関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

(1) $\int_a^x f(t)\,dt=x^2-3x-4$　　(2) $\int_1^x f(t)\,dt=2x^2-3x+a$

10. 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-2}^3|x|dx$　　(2) $\int_0^3|x-2|dx$　　(3) $\int_1^3|x^2-4|dx$

11. 等式 $\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を利用して，次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-3}^2(x-2)(x+3)dx$　　(2) $\int_{-2}^1(x^2+x-2)dx$

(3) $\int_{2-\sqrt{2}}^{2+\sqrt{2}}(x^2-4x+2)dx$

12. 次の関数 $f(x)$ の極値を求めよ。

(1) $f(x)=\int_1^x(t^2-1)dt$　　(2) $f(x)=\int_{-1}^x(3t^2+4t+1)dt$

1．次の不定積分を求めよ。

(1) $\int(-3)dx$　(2) $\int(4x-1)dx$　(3) $\int 3(x+2)dx$

(4) $\int(3x^2-2)dx$　(5) $\int(t^2+2t)dt$　(6) $\int(6x^2-2x+5)dx$

解答　C は積分定数とする。

(1) $-3x+C$　(2) $2x^2-x+C$　(3) $\frac{3}{2}x^2+6x+C$　(4) x^3-2x+C

(5) $\frac{t^3}{3}+t^2+C$　(6) $2x^3-x^2+5x+C$

C は積分定数とする。

(1) (与式)$=-3\cdot x+C=-3x+C$

(2) (与式)$=4\cdot\frac{x^2}{2}-x+C=2x^2-x+C$

(3) (与式)$=\int(3x+6)dx=3\cdot\frac{x^2}{2}+6\cdot x+C=\frac{3}{2}x^2+6x+C$

(4) (与式)$=3\cdot\frac{x^3}{3}-2\cdot x+C=x^3-2x+C$

(5) (与式)$=\frac{t^3}{3}+2\cdot\frac{t^2}{2}+C=\frac{t^3}{3}+t^2+C$

(6) (与式)$=6\cdot\frac{x^3}{3}-2\cdot\frac{x^2}{2}+5\cdot x+C=2x^3-x^2+5x+C$

2．次の不定積分を求めよ。

(1) $\int(x+1)(x-3)dx$　(2) $\int(2t+1)(3t-2)dt$

(3) $\int(x-4)^2dx$　(4) $\int(3y+2)^2dy$

解答　C は積分定数とする。

(1) $\frac{x^3}{3}-x^2-3x+C$　(2) $2t^3-\frac{t^2}{2}-2t+C$　(3) $\frac{x^3}{3}-4x^2+16x+C$

(4) $3y^3+6y^2+4y+C$

C は積分定数とする。

(1) (与式)$=\int(x^2-2x-3)dx=\frac{x^3}{3}-2\cdot\frac{x^2}{2}-3\cdot x+C=\frac{x^3}{3}-x^2-3x+C$

(2) (与式)$=\int(6t^2-t-2)dt=6\cdot\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}-2\cdot t+C=2t^3-\frac{t^2}{2}-2t+C$

(3) (与式)$=\int(x^2-8x+16)dx=\frac{x^3}{3}-8\cdot\frac{x^2}{2}+16\cdot x+C=\frac{x^3}{3}-4x^2+16x+C$

(4) (与式)$=\int(9y^2+12y+4)dy=9\cdot\frac{y^3}{3}+12\cdot\frac{y^2}{2}+4\cdot y+C=3y^3+6y^2+4y+C$

3．次の条件を満たす関数 $F(x)$ を求めよ。

(1) $F'(x)=4x-4$，$F(1)=1$　(2) $F'(x)=3(x+1)(x-2)$，$F(0)=1$

解答　(1) $F(x)=2x^2-4x+3$　(2) $F(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+1$

(1) $F'(x)=4x-4$ であるから

$F(x)=\int(4x-4)dx=2x^2-4x+C$　(C は積分定数)

$F(1)=1$ から　$2\cdot1^2-4\cdot1+C=1$

すなわち　$-2+C=1$　ゆえに　$C=3$

よって　$F(x)=2x^2-4x+3$

(2) $F'(x)=3(x+1)(x-2)$ であるから

$F(x)=\int3(x+1)(x-2)dx=\int(3x^2-3x-6)dx$

$=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+C$　(C は積分定数)

$F(0)=1$ から　$C=1$

よって　$F(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+1$

4．次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^3(-2)dx$　(2) $\int_2^4(x-3)dx$　(3) $\int_2^3(3x^2-5)dx$

(4) $\int_0^1(x^2-2x-3)dx$　(5) $\int_{-1}^3 6(x+2)(x-1)dx$　(6) $\int_{-2}^2(x+2)^2dx$

解答　(1) -6　(2) 0　(3) 14　(4) $-\frac{11}{3}$　(5) 32　(6) $\frac{64}{3}$

(1) (与式)$=\Big[-2x\Big]_0^3=-2\cdot3=-6$

(2) (与式)$=\Big[\frac{x^2}{2}-3x\Big]_2^4=(8-12)-(2-6)=0$

(3) (与式)$=\Big[x^3-5x\Big]_2^3=(27-15)-(8-10)=14$

(4) (与式)$=\Big[\frac{x^3}{3}-x^2-3x\Big]_0^1=\frac{1}{3}-1-3=-\frac{11}{3}$

(5) (与式)$=\int_{-1}^3(6x^2+6x-12)dx=\Big[2x^3+3x^2-12x\Big]_{-1}^3$

$=(54+27-36)-(-2+3+12)=32$

(6) (与式)$=\int_{-2}^2(x^2+4x+4)dx=\Big[\frac{x^3}{3}+2x^2+4x\Big]_{-2}^2$

$=\left(\frac{8}{3}+8+8\right)-\left(-\frac{8}{3}+8-8\right)=\frac{64}{3}$

5．次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-2}^4(2x+1)dx+\int_{-2}^4(3x^2-x)dx$　(2) $\int_2^0(x^2+1)dx$

(3) $\int_0^1(x^2-2x)dx+\int_1^3(x^2-2x)dx$　(4) $\int_{-2}^4 3x^2dx-\int_1^4 3x^2dx$

解答　(1) 84　(2) $-\frac{14}{3}$　(3) 0　(4) 9

(1) (与式)$=\int_{-2}^4\{(2x+1)+(3x^2-x)\}dx=\int_{-2}^4(3x^2+x+1)dx=\Big[x^3+\frac{x^2}{2}+x\Big]_{-2}^4$

$=(64+8+4)-(-8+2-2)=84$

参考　(公式)　$\int_a^b\{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

(2) (与式)$=-\int_0^2(x^2+1)dx=-\Big[\frac{x^3}{3}+x\Big]_0^2=-\left(\frac{8}{3}+2\right)=-\frac{14}{3}$

参考　(公式)　$\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$

(3) (与式)$=\int_0^3(x^2-2x)dx=\Big[\frac{x^3}{3}-x^2\Big]_0^3=\frac{27}{3}-9=0$

参考　(公式)　$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

(4) (与式)$=\int_{-2}^4 3x^2dx+\int_4^1 3x^2dx=\int_{-2}^1 3x^2dx=\Big[x^3\Big]_{-2}^1=1-(-8)=9$

6．次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-2}^3(3x^2-6x+1)dx$　(2) $\int_{-1}^1(2x^2-5x+3)dx$

(3) $\int_{-1}^2(x^2+x)dx+\int_1^{-1}(x^2+x)dx$

解答　(1) 25　(2) $\frac{22}{3}$　(3) $\frac{23}{6}$

(1) (与式)$=\Big[x^3-3x^2+x\Big]_{-2}^3=(27-27+3)-(-8-12-2)=25$

(2) (与式)$=\Big[\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+3x\Big]_{-1}^1=\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{2}+3\right)-\left(-\frac{2}{3}-\frac{5}{2}-3\right)=\frac{22}{3}$

(3) (与式)$=\int_1^{-1}(x^2+x)dx+\int_{-1}^2(x^2+x)dx=\int_1^2(x^2+x)dx=\Big[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\Big]_1^2$

$=\left(\frac{8}{3}+2\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{23}{6}$

7．次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(1) $f(x)=x+\int_0^2 f(t)\,dt$　(2) $f(x)=\int_0^2\{3x^2-xf(t)\}dt$

解答　(1) $f(x)=x-2$　(2) $f(x)=6x^2-\frac{16}{3}x$

(1) $a=\int_0^2 f(t)\,dt$ とおくと　$f(x)=x+a$

ゆえに　$\int_0^2 f(t)\,dt=\int_0^2(t+a)dt=\Big[\frac{t^2}{2}+at\Big]_0^2=2+2a$

よって　$a=2+2a$

これを解いて　$a=-2$

したがって　$f(x)=x-2$

(2) $f(x)=3x^2\int_0^2dt-x\int_0^2 f(t)\,dt=6x^2-x\int_0^2 f(t)\,dt$

$a=\int_0^2 f(t)\,dt$ とおくと　$f(x)=6x^2-ax$

ゆえに　$\int_0^2 f(t)\,dt=\int_0^2(6t^2-at)dt=\Big[2t^3-\frac{a}{2}t^2\Big]_0^2=16-2a$

よって　$a=16-2a$

これを解いて　$a=\frac{16}{3}$

したがって　$f(x)=6x^2-\frac{16}{3}x$

8．次の x の関数を微分せよ。

(1) $\int_0^x(2t-1)dt$　(2) $\int_1^x(t^2-3t+4)dt$　(3) $\int_x^{-2}(t^3-2t+1)dt$

解答　(1) $2x-1$　(2) x^2-3x+4　(3) $-x^3+2x-1$

参考　(公式)　$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$　ただし a は定数

ここで，$\frac{d}{dx}$は「後ろにくっついているものを微分する」という記号

つまり，$\int_a^x f(t)dt$　という形のものを微分すると，中身の$f(t)$が出てくる。

ただし，t は x に置き換わって出てくる。

(1)　$\frac{d}{dx}\int_0^x(2t-1)dt=2x-1$

(2)　$\frac{d}{dx}\int_1^x(t^2-3t+4)dt=x^2-3x+4$

(3)　上端と下端を入れ替えると（－１）倍される。つまり

$\int_x^{-2}(t^3-2t+1)dt=-\int_{-2}^x(t^3-2t+1)dt$ であるから

$$\frac{d}{dx}\int_x^{-2}(t^3-2t+1)dt=-\frac{d}{dx}\int_{-2}^x(t^3-2t+1)dt=-(x^3-2x+1)$$
$$=-x^3+2x-1$$

9. 次の等式が任意の x に対して成り立つとき，関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

(1)　$\int_a^x f(t)\,dt=x^2-3x-4$　　　　(2)　$\int_1^x f(t)\,dt=2x^2-3x+a$

解答　(1)　$f(x)=2x-3$；$a=-1,\ 4$　　(2)　$f(x)=4x-3$；$a=1$

(1)　等式の両辺を x で微分すると　　$f(x)=2x-3$

また，与えられた等式で $x=a$ とおくと，左辺は 0 になるから

$0=a^2-3a-4$

ゆえに　　$(a+1)(a-4)=0$

よって　　$a=-1,\ 4$

(2)　等式の両辺を x で微分すると　　$f(x)=4x-3$

また，与えられた等式で $x=1$ とおくと，左辺は 0 になるから

$0=2-3+a$

よって　　$a=1$

10. 次の定積分を求めよ。

(1)　$\int_{-2}^3|x|dx$　　　(2)　$\int_0^3|x-2|dx$　　　(3)　$\int_1^3|x^2-4|dx$

解答　(1)　$\frac{13}{2}$　　(2)　$\frac{5}{2}$　　(3)　4

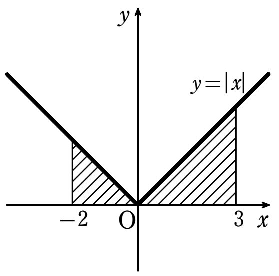
(1)　$-2\leqq x\leqq 0$ のとき　$|x|=-x$

$0\leqq x\leqq 3$　のとき　$|x|=x$

(与式)$=-\int_{-2}^0 xdx+\int_0^3 xdx$

$=-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^0+\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3$

$=-(0-2)+\frac{9}{2}=\frac{13}{2}$



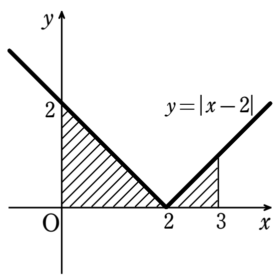
(2)　$0\leqq x\leqq 2$ のとき　$|x-2|=-(x-2)$

$2\leqq x\leqq 3$ のとき　$|x-2|=x-2$

(与式)$=-\int_0^2(x-2)dx+\int_2^3(x-2)dx$

$=-\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_0^2+\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^3$

$=-(2-4)+\left\{\left(\frac{9}{2}-6\right)-(2-4)\right\}=\frac{5}{2}$



(3)　$1\leqq x\leqq 2$ のとき　$|x^2-4|=-(x^2-4)$

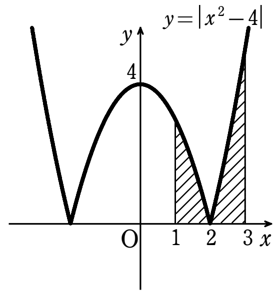
$2\leqq x\leqq 3$ のとき　$|x^2-4|=x^2-4$

(与式)$=-\int_1^2(x^2-4)dx+\int_2^3(x^2-4)dx$

$=-\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_1^2+\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_2^3$

$=-\left\{\left(\frac{8}{3}-8\right)-\left(\frac{1}{3}-4\right)\right\}+\left\{(9-12)-\left(\frac{8}{3}-8\right)\right\}$

$=4$



11. 等式 $\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を利用して，次の定積分を求めよ。

(1)　$\int_{-3}^2(x-2)(x+3)dx$　　　　(2)　$\int_{-2}^1(x^2+x-2)dx$

(3)　$\int_{2-\sqrt{2}}^{2+\sqrt{2}}(x^2-4x+2)dx$

解答　(1)　$-\frac{125}{6}$　　(2)　$-\frac{9}{2}$　　(3)　$-\frac{8\sqrt{2}}{3}$

(1)　(与式)$=\int_{-3}^2(x+3)(x-2)dx=-\frac{1}{6}\{2-(-3)\}^3=-\frac{1}{6}\cdot 5^3=-\frac{125}{6}$

(2)　(与式)$=\int_{-2}^1(x+2)(x-1)dx=-\frac{1}{6}\{1-(-2)\}^3=-\frac{1}{6}\cdot 3^3=-\frac{9}{2}$

(3)　$x^2-4x+2=0$ の解は　　$x=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot 2}=2\pm\sqrt{2}$

したがってx^2-4x+2は$2+\sqrt{2}$ と$2-\sqrt{2}$ を用いて

$x^2-4x+2=\{x-(2-\sqrt{2})\}\{x-(2+\sqrt{2})\}$

と無理矢理に因数分解ができる。（公式）

よって　(与式)$=\int_{2-\sqrt{2}}^{2+\sqrt{2}}\{x-(2-\sqrt{2})\}\{x-(2+\sqrt{2})\}dx$

$=-\frac{1}{6}\{(2+\sqrt{2})-(2-\sqrt{2})\}^3=-\frac{1}{6}\cdot(2\sqrt{2})^3=-\frac{8\sqrt{2}}{3}$

12. 次の関数 $f(x)$ の極値を求めよ。

(1)　$f(x)=\int_1^x(t^2-1)dt$　　　　(2)　$f(x)=\int_{-1}^x(3t^2+4t+1)dt$

解答　(1)　$x=-1$ のとき極大値 $\frac{4}{3}$，$x=1$ のとき極小値 0

(2)　$x=-1$ のとき極大値 0，$x=-\frac{1}{3}$ のとき極小値 $-\frac{4}{27}$

参考　（公式）　$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$　　ただし a は定数

ここで，$\frac{d}{dx}$は「後ろにくっついているものを微分する」という記号

つまり，$\int_a^x f(t)dt$　という形のものを微分すると，中身の$f(t)$が出てくる。

ただし，t は x に置き換わって出てくる。

(1)　$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_1^x(t^2-1)dt=x^2-1=(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\pm 1$

また　　$f(x)=\left[\frac{t^3}{3}-t\right]_1^x=\frac{x^3}{3}-x+\frac{2}{3}$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	…	-1	…	1	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 $\frac{4}{3}$	↘	極小 0	↗

よって，$x=-1$ のとき極大値 $\frac{4}{3}$，

$x=1$ のとき極小値 0　をとる。

(2)　$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_{-1}^x(3t^2+4t+1)dt=3x^2+4x+1=(x+1)(3x+1)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=-1,\ -\frac{1}{3}$

また　　$f(x)=\left[t^3+2t^2+t\right]_{-1}^x=x^3+2x^2+x$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	…	-1	…	$-\frac{1}{3}$	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 0	↘	極小 $-\frac{4}{27}$	↗

よって，$x=-1$ のとき極大値 0，

$x=-\frac{1}{3}$ のとき極小値 $-\frac{4}{27}$　をとる。