# 数学演習（積分法）Ｈ２３．９．２２

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

１．次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int dx$　　(2) $\displaystyle\int (x^2-6x+4)dx$

(3) $\displaystyle\int (2t+1)(t-3)dt$　　(4) $\displaystyle\int (x+2)^3dx-\int (x-2)^3dx$

２．不定積分 $\displaystyle\int (x-1)^7(x+1)dx$ を求めよ。（ただし，被積分関数を展開しないこと）

３．次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(4x^2-x+3)dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(2x^2+3x)dx-\int_{-1}^{2}x(2x+1)dx$

(3) $\displaystyle\int_{-3}^{3}(3x^2-4x)dx-\int_{4}^{3}x(3x-4)dx$

４．定積分 $\displaystyle\int_{-2}^{2}(x-1)(2x^2-3x+1)dx$ を求めよ。

５．(1)　等式 $f(x)=3x^2-x+\displaystyle\int_{-1}^{1}f(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(2)　$\displaystyle\int_{x}^{a}f(t)\,dt=\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{2}{3}$ のとき，$f(x)$ と定数 $a$ の値を求めよ。

６．関数 $f(x)=\displaystyle\int_{1}^{x}(4t^2-8t+3)dt$ の極値を求め，グラフをかけ。

7．次の曲線，直線と $x$ 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1)　$y=2x^2-4x-4$

(2)　$y=-2x^2+4x+6$

(3)　$y=4-x^2$ $(0\leqq x\leqq 1)$，$y$ 軸，$x=1$

(4)　$y=x^2-4x+3$，$x=0$，$x=5$

8．次の曲線や直線で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1)　$y=-x^2+3x+2$，$y=x-1$

(2)　$y=x^2+1$，$y=-x^2+x+2$

9．関数 $y=2x^3-x^2-2x+1$ のグラフと $x$ 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

10．放物線 $y=x^2-4x+3$ を $C$ とする。$C$ 上の点 $(0,\ 3)$，$(6,\ 15)$ における接線をそれぞれ，$\ell_1$，$\ell_2$ とするとき，次のものを求めよ。

(1)　$\ell_1$，$\ell_2$ の方程式

(2)　$C$，$\ell_1$，$\ell_2$ で囲まれる図形の面積

11．放物線 $y=x(3-x)$ と $x$ 軸で囲まれた図形の面積を，直線 $y=ax$ が 2 等分するとき，$a$ の値を求めよ。

数学演習（積分法）Ｈ２３．９．２２　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

**1**．次の不定積分を求めよ。

(1) $\int dx$　　(2) $\int (x^2-6x+4)dx$

(3) $\int (2t+1)(t-3)dt$　　(4) $\int (x+2)^3dx-\int (x-2)^3dx$

解答　(1) $x+C$　（$C$ は積分定数）　(2) $\dfrac{x^3}{3}-3x^2+4x+C$　（$C$ は積分定数）

(3) $\dfrac{2}{3}t^3-\dfrac{5}{2}t^2-3t+C$　（$C$ は積分定数）　(4) $4x^3+16x+C$　（$C$ は積分定数）

(1) $(x)'=1$ であるから　$\int dx=\int 1dx=x+C$　（$C$ は積分定数）

(2) $\int (x^2-6x+4)dx=\int x^2dx-6\int xdx+4\int dx$

$=\dfrac{x^3}{3}-3x^2+4x+C$　（$C$ は積分定数）

(3) $\int (2t+1)(t-3)dt=\int (2t^2-5t-3)dt=\dfrac{2}{3}t^3-\dfrac{5}{2}t^2-3t+C$　（$C$ は積分定数）

(4) $\int (x+2)^3dx-\int (x-2)^3dx=\int \{(x+2)^3-(x-2)^3\}dx=\int (12x^2+16)dx$

$=4x^3+16x+C$　（$C$ は積分定数）

**2**．不定積分 $\int (x-1)^7(x+1)dx$ を求めよ。（ただし，被積分関数を展開しないこと）

解答　$\dfrac{1}{36}(x-1)^8(4x+5)+C$（$C$ は積分定数）

$\int (x-1)^7(x+1)dx=\int (x-1)^7\{(x-1)+2\}dx=\int \{(x-1)^8+2(x-1)^7\}dx$

$=\int (x-1)^8dx+2\int (x-1)^7dx=\dfrac{1}{9}(x-1)^9+\dfrac{2}{8}(x-1)^8+C$

$=\dfrac{1}{36}(x-1)^8\{4(x-1)+9\}+C$

$=\dfrac{1}{36}(x-1)^8(4x+5)+C$（$C$ は積分定数）

**3**．次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-1}^{2}(4x^2-x+3)dx$　　(2) $\int_{-1}^{2}(2x^2+3x)dx-\int_{-1}^{2}x(2x+1)dx$

(3) $\int_{-3}^{3}(3x^2-4x)dx-\int_{4}^{3}x(3x-4)dx$

解答　(1) $\dfrac{39}{2}$　(2) 3　(3) 77

(1) $\int_{-1}^{2}(4x^2-x+3)dx=4\int_{-1}^{2}x^2dx-\int_{-1}^{2}xdx+3\int_{-1}^{2}dx$

$=4\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}-\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2}+3\Big[x\Big]_{-1}^{2}$

$=4\left(\dfrac{8}{3}+\dfrac{1}{3}\right)-\left(2-\dfrac{1}{2}\right)+3(2+1)=\dfrac{39}{2}$

(2) $\int_{-1}^{2}(2x^2+3x)dx-\int_{-1}^{2}x(2x+1)dx=\int_{-1}^{2}\{(2x^2+3x)-(2x^2+x)\}dx$

$=\int_{-1}^{2}2xdx=\Big[x^2\Big]_{-1}^{2}=4-1=3$

(3) $\int_{-3}^{3}(3x^2-4x)dx-\int_{4}^{3}x(3x-4)dx=\int_{-3}^{3}(3x^2-4x)dx+\int_{3}^{4}(3x^2-4x)dx$

$=\int_{-3}^{4}(3x^2-4x)dx=\Big[x^3-2x^2\Big]_{-3}^{4}$

$=(64-32)-(-27-18)=77$

**4**．定積分 $\int_{-2}^{2}(x-1)(2x^2-3x+1)dx$ を求めよ。

解答　$-\dfrac{92}{3}$

$\int_{-2}^{2}(x-1)(2x^2-3x+1)dx=\int_{-2}^{2}(2x^3-5x^2+4x-1)dx$

$=\int_{-2}^{2}(2x^3+4x)dx+\int_{-2}^{2}(-5x^2-1)dx$

$=0+2\int_{0}^{2}(-5x^2-1)dx=-2\left[\dfrac{5}{3}x^3+x\right]_{0}^{2}$

$=-2\left(\dfrac{40}{3}+2\right)=-\dfrac{92}{3}$

**5**．(1) 等式 $f(x)=3x^2-x+\int_{-1}^{1}f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) $\int_{x}^{a}f(t)dt=\dfrac{3}{2}x^2-2x+\dfrac{2}{3}$ のとき，$f(x)$ と定数 $a$ の値を求めよ。

解答　(1) $f(x)=3x^2-x-2$　(2) $f(x)=-3x+2$，$a=\dfrac{2}{3}$

(1) $\int_{-1}^{1}f(t)dt=k$（定数）とおくと　$f(x)=3x^2-x+k$

よって　$\int_{-1}^{1}f(t)dt=\int_{-1}^{1}(3t^2-t+k)dt=\left[t^3-\dfrac{t^2}{2}+kt\right]_{-1}^{1}=2k+2$

ゆえに　$2k+2=k$　　よって　$k=-2$

したがって　$f(x)=3x^2-x-2$

(2) $\int_{x}^{a}f(t)dt=\dfrac{3}{2}x^2-2x+\dfrac{2}{3}$　より

$\int_{x}^{a}f(t)dt=-\int_{a}^{x}f(t)dt$　であるから

$-\int_{a}^{x}f(t)dt=\dfrac{3}{2}x^2-2x+\dfrac{2}{3}$　より

$\int_{a}^{x}f(t)dt=-\dfrac{3}{2}x^2+2x-\dfrac{2}{3}$ …… ① となる。

① の両辺を $x$ で微分すると　$f(x)=-3x+2$

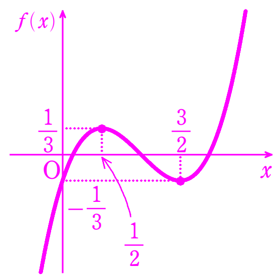
また，① で $x=a$ とおくと，左辺は 0 になるから

$0=-\dfrac{3}{2}a^2+2a-\dfrac{2}{3}$　すなわち　$9a^2-12a+4=0$

よって　$(3a-2)^2=0$　　したがって　$a=\dfrac{2}{3}$

**6**．関数 $f(x)=\int_{1}^{x}(4t^2-8t+3)dt$ の極値を求め，グラフをかけ。

解答　$x=\dfrac{1}{2}$ で極大値 $\dfrac{1}{3}$，$x=\dfrac{3}{2}$ で極小値 $-\dfrac{1}{3}$；[図]




$f'(x)=4x^2-8x+3=(2x-1)(2x-3)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{3}{2}$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

| $x$ | …… | $\frac{1}{2}$ | …… | $\frac{3}{2}$ | …… |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 極大 | ↘ | 極小 | ↗ |

また　$f(x)=\int_{1}^{x}(4t^2-8t+3)dt$

$=\left[\dfrac{4}{3}t^3-4t^2+3t\right]_{1}^{x}$

$=\dfrac{4}{3}x^3-4x^2+3x-\dfrac{1}{3}$

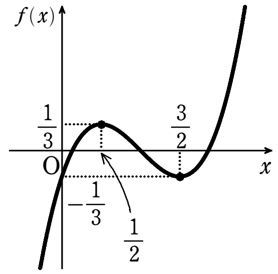
よって　$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^3-4\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+3\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$

$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{3}{2}\right)^3-4\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+3\cdot\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{3}$

ゆえに，$f(x)$ は，$x=\dfrac{1}{2}$ で極大値 $\dfrac{1}{3}$，

$x=\dfrac{3}{2}$ で極小値 $-\dfrac{1}{3}$　をとる。

また，グラフは右の図のようになる。




**7**．次の曲線，直線と $x$ 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1) $y=2x^2-4x-4$　　(2) $y=-2x^2+4x+6$

(3) $y=4-x^2$ $(0\leqq x\leqq 1)$，$y$ 軸，$x=1$　　(4) $y=x^2-4x+3$，$x=0$，$x=5$

解答　(1) $8\sqrt{3}$　(2) $\dfrac{64}{3}$　(3) $\dfrac{11}{3}$　(4) $\dfrac{28}{3}$

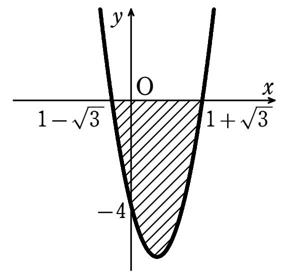
(1) 曲線 $y=2x^2-4x-4$ と $x$ 軸の交点の $x$ 座標は，

$2x^2-4x-4=0$ すなわち $x^2-2x-2=0$ の解である。

これを解いて　$x=1\pm\sqrt{3}$

$1-\sqrt{3}\leqq x\leqq 1+\sqrt{3}$ において $y\leqq 0$ であるから，

求める面積 $S$ は




$S=-\int_{1-\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}(2x^2-4x-4)dx$

$=-2\int_{1-\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}(x^2-2x-2)dx$

$=-2\int_{1-\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}\{x-(1-\sqrt{3})\}\{x-(1+\sqrt{3})\}dx$

$=-2\cdot\left(-\dfrac{1}{6}\right)\{(1+\sqrt{3})-(1-\sqrt{3})\}^3=8\sqrt{3}$

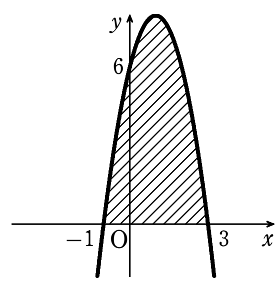
(2) 曲線 $y=-2x^2+4x+6$ と $x$ 軸の交点の $x$ 座標は，

$-2x^2+4x+6=0$ すなわち $x^2-2x-3=0$ の解である。

これを解いて　$(x+1)(x-3)=0$

よって　$x=-1$，3

$-1\leqq x\leqq 3$ において $y\geqq 0$ であるから，求める面積 $S$ は




$S=\int_{-1}^{3}(-2x^2+4x+6)dx$

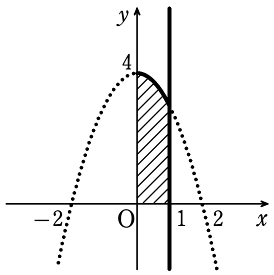
$=-2\int_{-1}^{3}(x+1)(x-3)dx$

$$=-2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\{3-(-1)\}^3=\frac{64}{3}$$

(3)　求める面積 $S$ は，右の図から

$$S=\int_0^1(4-x^2)dx=\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$=4-\frac{1}{3}=\frac{11}{3}$$




(4)　曲線 $y=x^2-4x+3$ と $x$ 軸の交点の $x$ 座標は，

$x^2-4x+3=0$ の解である。

これを解いて　　$(x-1)(x-3)=0$

よって　　$x=1,\ 3$

求める面積 $S$ は，右の図から

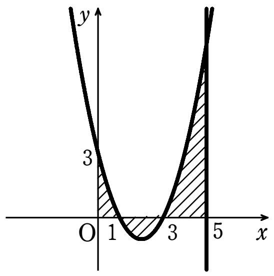
$$S=\int_0^1(x^2-4x+3)dx-\int_1^3(x^2-4x+3)dx$$

$$+\int_3^5(x^2-4x+3)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_0^1-\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_1^3+\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_3^5$$

$$=\frac{1^3-(3^3-1^3)+(5^3-3^3)}{3}-2\{1^2-(3^2-1^2)+(5^2-3^2)\}+3\{1-(3-1)+(5-3)\}$$

$$=\frac{73}{3}-18+3=\frac{28}{3}$$




8．次の曲線や直線で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1)　$y=-x^2+3x+2,\ \ y=x-1$　　　(2)　$y=x^2+1,\ \ y=-x^2+x+2$

解答　(1)　$\frac{32}{3}$　　(2)　$\frac{9}{8}$

(1)　放物線と直線の交点の $x$ 座標は，

$-x^2+3x+2=x-1$　すなわち　$x^2-2x-3=0$

の解である。

これを解いて　　$(x+1)(x-3)=0$

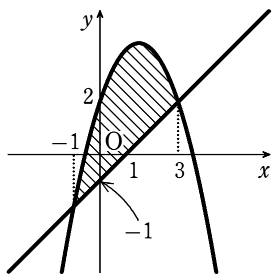
よって　　$x=-1,\ 3$

ゆえに，右の図から求める面積 $S$ は

$$S=\int_{-1}^3\{(-x^2+3x+2)-(x-1)\}dx$$

$$=\int_{-1}^3(-x^2+2x+3)dx$$

$$=-\int_{-1}^3(x+1)(x-3)dx=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{3-(-1)\}^3=\frac{1}{6}\cdot4^3=\frac{32}{3}$$




(2)　2 曲線の交点の $x$ 座標は，$x^2+1=-x^2+x+2$

すなわち $2x^2-x-1=0$ の解である。

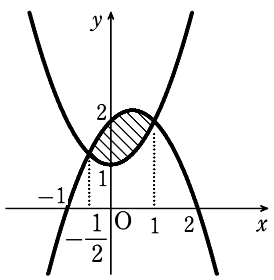
これを解いて　　$(2x+1)(x-1)=0$

よって　　$x=-\frac{1}{2},\ 1$

ゆえに，右の図から求める面積 $S$ は

$$S=\int_{-\frac{1}{2}}^1\{(-x^2+x+2)-(x^2+1)\}dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^1(-2x^2+x+1)dx$$




$$=-\int_{-\frac{1}{2}}^1(2x+1)(x-1)dx=-2\int_{-\frac{1}{2}}^1\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)dx$$

$$=-2\left(-\frac{1}{6}\right)\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}^3=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{9}{8}$$

9．関数 $y=2x^3-x^2-2x+1$ のグラフと $x$ 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

解答　$\frac{71}{48}$

曲線 $y=2x^3-x^2-2x+1$ と $x$ 軸の交点の $x$ 座標は，$2x^3-x^2-2x+1=0$ の解である。

$f(x)=2x^3-x^2-2x+1$ とすると　　$f(1)=2-1-2+1=0$

よって　　$f(x)=(x-1)(2x^2+x-1)$

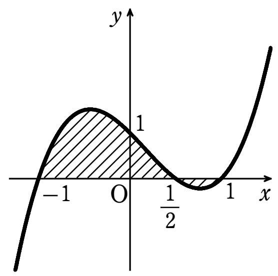
$=(x-1)(x+1)(2x-1)$

$f(x)=0$ を解いて　　$x=1,\ -1,\ \frac{1}{2}$

また，曲線は右の図のようになり

$-1\leqq x\leqq\frac{1}{2}$ において　　$y\geqq0$,

$\frac{1}{2}\leqq x\leqq1$ において　　$y\leqq0$




ゆえに，求める面積 $S$ は

$$S=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(2x^3-x^2-2x+1)dx-\int_{\frac{1}{2}}^1(2x^3-x^2-2x+1)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{2}-\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}-\left[\frac{x^4}{2}-\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$=2\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right\}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{71}{48}$$

10．放物線 $y=x^2-4x+3$ を $C$ とする。$C$ 上の点 $(0,\ 3)$，$(6,\ 15)$ における接線をそれぞれ，$\ell_1$，$\ell_2$ とするとき，次のものを求めよ。

(1)　$\ell_1$，$\ell_2$ の方程式　　　　(2)　$C$，$\ell_1$，$\ell_2$ で囲まれる図形の面積

解答　(1)　$\ell_1:\ y=-4x+3$，$\ell_2:\ y=8x-33$　　(2)　18

(1)　$y'=2x-4$ から，

$\ell_1$ の方程式は　　$y-3=(2\cdot0-4)(x-0)$　すなわち　$y=-4x+3$

$\ell_2$ の方程式は　　$y-15=(2\cdot6-4)(x-6)$　すなわち　$y=8x-33$

(2)　$\ell_1$，$\ell_2$ の交点の $x$ 座標を求めると

$-4x+3=8x-33$ から　　$12x=36$　　　ゆえに　　$x=3$

よって，求める面積 $S$ は

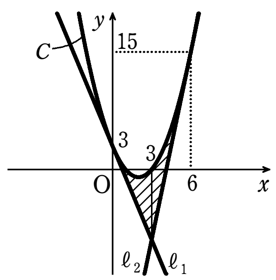
$$S=\int_0^3\{(x^2-4x+3)-(-4x+3)\}dx$$

$$+\int_3^6\{(x^2-4x+3)-(8x-33)\}dx$$

$$=\int_0^3x^2dx+\int_3^6(x-6)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3+\left[\frac{1}{3}(x-6)^3\right]_3^6$$

$$=9+9=18$$




11．放物線 $y=x(3-x)$ と $x$ 軸で囲まれた図形の面積を，直線 $y=ax$ が 2 等分するとき，$a$ の値を求めよ。

解答　$3-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$

放物線 $y=x(3-x)$ ……① と直線 $y=ax$ ……②

の交点の $x$ 座標は，$x(3-x)=ax$ の解である。

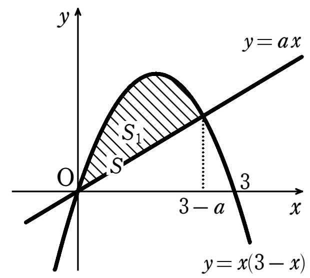
これを解いて　　$x\{x-(3-a)\}=0$

よって　　$x=0,\ 3-a$

図から　　$a>0$ かつ $3-a>0$

すなわち　　$0<a<3$

放物線①と直線②で囲まれた図形の面積を $S_1$ とすると




$$S_1=\int_0^{3-a}\{x(3-x)-ax\}dx=-\int_0^{3-a}x\{x-(3-a)\}dx$$

$$=\frac{1}{6}\{(3-a)-0\}^3=\frac{(3-a)^3}{6}$$

放物線①と $x$ 軸で囲まれた図形の面積を $S$ とすると，$S$ は $S_1=\frac{(3-a)^3}{6}$ に $a=0$ を代入したものと等しいから　　$S=\frac{9}{2}$

条件より，$S=2S_1$ であるから　　$\frac{9}{2}=2\cdot\frac{(3-a)^3}{6}$

ゆえに　　$(3-a)^3=\frac{27}{2}$

よって，$3-a=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ から　　$a=3-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$

これは $0<a<3$ を満たす。