数学演習（積分法）Ｈ２２．１１．２５　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

１．不定積分 $\int (x-1)^6(x+1)dx$ を求めよ。

２．次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-1}^{2}(x^2-x)dx-\int_{3}^{2}(x^2-x)dx$　　(2) $\int_{0}^{1}(2x+1)^2dx-\int_{0}^{1}(2x-1)^2dx$

３．次の等式を満たす２次関数 $f(x)$ を求めよ。

$$\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=0,\ \int_{0}^{2}f(x)\,dx=10,\ \int_{-1}^{1}xf(x)\,dx=\frac{4}{3}$$

４．次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x)=2x^2+1+\int_{0}^{1}xf(t)\,dt$$

５．関数 $f(x)=\int_{-1}^{x}(2t^2-3t+1)dt$ の極値を求めよ。

６．２つの曲線 $y=2x^2$ $(0\leqq x\leqq 3)$，$y=-x^2+6x$ $(0\leqq x\leqq 3)$ と直線 $x=3$ で囲まれた２つの部分の面積の和 S を求めよ。

7．2 つの放物線 $y=x^2+x-2$， $y=-2x^2+4x+4$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

8．次の定積分を求めよ。 $\displaystyle\int_{-1}^{2}|2x^2-x-1|dx$

9．放物線 $y=x(3-x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を，直線 $y=ax$ が 2 等分するとき，a の値を求めよ。

10. $y=f(x)$ は次の性質 (A)，(B)，(C) を満たすものとする。

(A)　$y=f(x)$ のグラフは $y=x^2$ のグラフを平行移動したものである。

(B)　$f(1)=0$

(C)　曲線 $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積は $\dfrac{1}{6}$ である。

このとき，$f(x)$ を求めよ。

1．不定積分 $\int (x-1)^6(x+1)\,dx$ を求めよ。

解答　$\frac{1}{56}(x-1)^7(7x+9)+C$（$C$ は積分定数）

解説

ヒント　$(x-1)^6$の塊を壊さないように，逆に$x+1$を$(x-1)+2$と変形する

$$\begin{aligned}\int (x-1)^6(x+1)\,dx &= \int (x-1)^6\{(x-1)+2\}\,dx\\ &= \int \{(x-1)^7+2(x-1)^6\}\,dx\\ &= \int (x-1)^7dx+2\int (x-1)^6dx\\ &= \frac{1}{8}(x-1)^8+\frac{2}{7}(x-1)^7+C\\ &= \frac{7}{56}(x-1)^8+\frac{16}{56}(x-1)^7+C\\ &= \frac{1}{56}(x-1)^7\{7(x-1)+16\}+C\\ &= \frac{1}{56}(x-1)^7(7x+9)+C\ (C\text{ は積分定数})\end{aligned}$$

2．次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-1}^{2}(x^2-x)\,dx-\int_{3}^{2}(x^2-x)\,dx$　　(2) $\int_{0}^{1}(2x+1)^2dx-\int_{0}^{1}(2x-1)^2dx$

解答　(1) $\frac{16}{3}$　(2) 4

解説

(1) $$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}(x^2-x)\,dx-\int_{3}^{2}(x^2-x)\,dx &= \int_{-1}^{2}(x^2-x)\,dx+\int_{2}^{3}(x^2-x)\,dx\\ &= \int_{-1}^{3}(x^2-x)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{3}\\ &= \left(9-\frac{9}{2}\right)-\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{16}{3}\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}\int_{0}^{1}(2x+1)^2dx-\int_{0}^{1}(2x-1)^2dx &= \int_{0}^{1}\{(2x+1)^2-(2x-1)^2\}\,dx\\ &= \int_{0}^{1}8x\,dx=\Big[4x^2\Big]_{0}^{1}=4\end{aligned}$$

3．次の等式を満たす２次関数 $f(x)$ を求めよ。

$$\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=0,\ \int_{0}^{2}f(x)\,dx=10,\ \int_{-1}^{1}xf(x)\,dx=\frac{4}{3}$$

解答　$f(x)=3x^2+2x-1$

解説

$f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと

$$\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=2\int_{0}^{1}(ax^2+c)\,dx=2\left[\frac{a}{3}x^3+cx\right]_{0}^{1}=2\left(\frac{a}{3}+c\right)$$

$$\int_{0}^{2}f(x)\,dx=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_{0}^{2}=\frac{8}{3}a+2b+2c$$

$$\int_{-1}^{1}xf(x)\,dx=2\int_{0}^{1}bx^2dx=2\left[\frac{b}{3}x^3\right]_{0}^{1}=\frac{2}{3}b$$

条件から　$2\left(\frac{a}{3}+c\right)=0,\ \frac{8}{3}a+2b+2c=10,\ \frac{2}{3}b=\frac{4}{3}$

よって　$a+3c=0$　……①

$4a+3b+3c=15$　……②

$b=2$　……③

①～③を解いて　$a=3,\ b=2,\ c=-1$

したがって　$f(x)=3x^2+2x-1$

4．次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x)=2x^2+1+\int_{0}^{1}xf(t)\,dt$$

解答　$f(x)=2x^2+\frac{10}{3}x+1$

解説

注意　積分の中にxが入っていたら外に出すこと

x は積分変数 t に無関係であるから　$\int_{0}^{1}xf(t)\,dt=x\int_{0}^{1}f(t)\,dt$

$\int_{0}^{1}f(t)\,dt$ は定数であるから，$\int_{0}^{1}f(t)\,dt=k$ とおくと

$$f(x)=2x^2+1+xk$$

よって　$$\begin{aligned}k=\int_{0}^{1}f(t)\,dt &= \int_{0}^{1}(2t^2+kt+1)\,dt=\left[\frac{2}{3}t^3+\frac{k}{2}t^2+t\right]_{0}^{1}\\ &= \frac{2}{3}+\frac{k}{2}+1\end{aligned}$$

すなわち　$k=\frac{k}{2}+\frac{5}{3}$　　これを解いて　$k=\frac{10}{3}$

したがって　$f(x)=2x^2+\frac{10}{3}x+1$

5．関数 $f(x)=\int_{-1}^{x}(2t^2-3t+1)\,dt$ の極値を求めよ。

解答　$x=\frac{1}{2}$ で極大値 $\frac{27}{8}$，$x=1$ で極小値 $\frac{10}{3}$

解説

ヒント　微分すると積分の中身が出てくる

$f'(x)=2x^2-3x+1=(x-1)(2x-1)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=\frac{1}{2},\ 1$

よって，$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	……	$\frac{1}{2}$	……	1	……
$f'(x)$	＋	0	－	0	＋
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

また　$$\begin{aligned}f(x) &= \int_{-1}^{x}(2t^2-3t+1)\,dt=\left[\frac{2}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+t\right]_{-1}^{x}\\ &= \frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+x+\frac{19}{6}\end{aligned}$$

ゆえに　$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+\frac{19}{6}=\frac{27}{8}$

$f(1)=\frac{2}{3}\cdot 1^3-\frac{3}{2}\cdot 1^2+1+\frac{19}{6}=\frac{10}{3}$

よって，$f(x)$ は，$x=\frac{1}{2}$ で極大値 $\frac{27}{8}$ をとり，$x=1$ で極小値 $\frac{10}{3}$ をとる。

6．２つの曲線 $y=2x^2\ (0\leqq x\leqq 3)$，$y=-x^2+6x\ (0\leqq x\leqq 3)$ と直線 $x=3$ で囲まれた２つの部分の面積の和 S を求めよ。

解答　8

解説

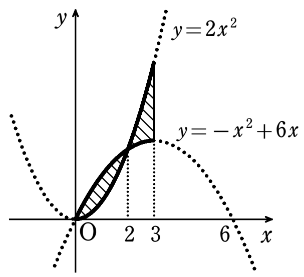
２つの曲線の交点の x 座標は，方程式

$2x^2=-x^2+6x$　すなわち　$3x^2-6x=0$

を解いて　$x=0,\ 2$

$0\leqq x\leqq 2$ では　$-x^2+6x\geqq 2x^2$

$2\leqq x\leqq 3$ では　$2x^2\geqq -x^2+6x$



よって　$$\begin{aligned}S &= \int_{0}^{2}\{(-x^2+6x)-2x^2\}\,dx\\ &\quad+\int_{2}^{3}\{2x^2-(-x^2+6x)\}\,dx\\ &= \int_{0}^{2}(-3x^2+6x)\,dx+\int_{2}^{3}(3x^2-6x)\,dx\\ &= \Big[-x^3+3x^2\Big]_{0}^{2}+\Big[x^3-3x^2\Big]_{2}^{3}=8\end{aligned}$$

7．2 つの放物線 $y=x^2+x-2$, $y=-2x^2+4x+4$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

解答 $\dfrac{27}{2}$

解説

2 つの放物線の交点の x 座標は，方程式

$$x^2+x-2=-2x^2+4x+4$$

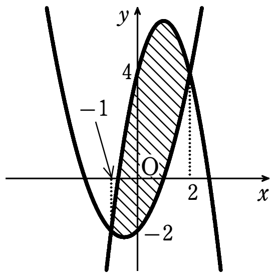
すなわち $3(x+1)(x-2)=0$ を解いて $x=-1,\ 2$

$-1\leqq x\leqq 2$ では，$x^2+x-2\leqq -2x^2+4x+4$ であるから

$$S=\int_{-1}^{2}\{(-2x^2+4x+4)-(x^2+x-2)\}dx$$

$$=-3\int_{-1}^{2}(x^2-x-2)dx$$

$$=-3\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-1}^{2}=\frac{27}{2}$$



8．次の定積分を求めよ。 $\displaystyle\int_{-1}^{2}|2x^2-x-1|dx$

解答 $\dfrac{15}{4}$

解説

$|2x^2-x-1|=|(x-1)(2x+1)|$

$x\leqq-\dfrac{1}{2}$, $1\leqq x$ のとき

$|2x^2-x-1|=2x^2-x-1$

$-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ のとき

$|2x^2-x-1|=-(2x^2-x-1)=-2x^2+x+1$

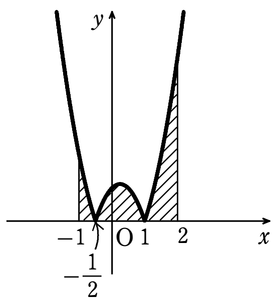
$$与式=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}(2x^2-x-1)dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(-2x^2+x+1)dx$$

$$+\int_{1}^{2}(2x^2-x-1)dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}-x\right]_{-1}^{-\frac{1}{2}}+\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}+x\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}$$

$$+\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}-x\right]_{1}^{2}$$

$$=\frac{15}{4}$$



9．放物線 $y=x(3-x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を，直線 $y=ax$ が 2 等分するとき，a の値を求めよ。

解答 $3-\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$

解説

放物線 $y=x(3-x)$ ……① と直線 $y=ax$ ……②

の交点の x 座標は，$x(3-x)=ax$ の解である。

これを解いて $x\{x-(3-a)\}=0$

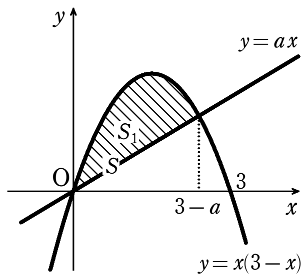
よって $x=0,\ 3-a$

図から $a>0$ かつ $3-a>0$

すなわち $0<a<3$

放物線 ① と直線 ② で囲まれた図形の面積を S_1

とすると



$$S_1=\int_0^{3-a}\{x(3-x)-ax\}dx=-\int_0^{3-a}x\{x-(3-a)\}dx$$

$$=\frac{1}{6}\{(3-a)-0\}^3=\frac{(3-a)^3}{6}$$

放物線 ① と x 軸で囲まれた図形の面積を S とすると，S は $S_1=\dfrac{(3-a)^3}{6}$ に $a=0$ を

代入したものと等しいから $S=\dfrac{9}{2}$

条件より，$S=2S_1$ であるから $\dfrac{9}{2}=2\cdot\dfrac{(3-a)^3}{6}$

ゆえに $(3-a)^3=\dfrac{27}{2}$

よって，$3-a=\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$ から $a=3-\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$

これは $0<a<3$ を満たす。

10. $y=f(x)$ は次の性質 (A)，(B)，(C) を満たすものとする。

(A) $y=f(x)$ のグラフは $y=x^2$ のグラフを平行移動したものである。

(B) $f(1)=0$

(C) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積は $\dfrac{1}{6}$ である。

このとき，$f(x)$ を求めよ。

解答 $f(x)=x^2-3x+2$ または $f(x)=x^2-x$

解説

(A) から $y=x^2$ のグラフを平行移動したものなので，$y=f(x)$のグラフはx^2の係数は 1 である放物線である。また(B) から，$y=f(x)$のグラフは点$(1,0)$を通るので，もう 1 つのx軸との交点を$(a,0)$とすると

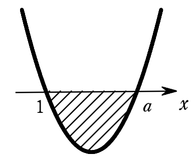
$$f(x)=(x-1)(x-a)$$

とおくことができる。ここで(C) から，x軸と$y=f(x)$で囲まれた部分の面積が存在するので，$y=f(x)$はx軸と異なる 2 点で交わっている。つまり，$a\neq 1$

ここで，aが 1 より大きいか小さいかで場合分けをする。

[1] $a>1$ のとき (C) から

$$-\int_1^a(x-1)(x-a)dx=-\left(-\frac{1}{6}\right)(a-1)^3=\frac{1}{6}$$



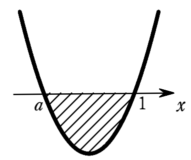
よって $(a-1)^3=1$ ゆえに $a=2$

これは条件を満たす。

このとき $f(x)=(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$

[2] $a<1$ のとき (C) から

$$-\int_a^1(x-1)(x-a)dx=-\left(-\frac{1}{6}\right)(1-a)^3=\frac{1}{6}$$



よって $(1-a)^3=1$ ゆえに $a=0$

これは条件を満たす。

このとき $f(x)=(x-1)x=x^2-x$

[1]，[2] から $f(x)=x^2-3x+2$ または $f(x)=x^2-x$