

1. 次の関数 $f(x)$ の $-3 \leq x \leq 3$ における最大値と最小値を求めよ。

$$f(x)=\int_{-3}^x(t^2+t-2)dt$$

2. 放物線 $y=x(3-x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を，直線 $y=ax$ が 2 等分するとき， a の値を求めよ。

3. 等式 $f(x)=1+2\int_0^1(xt+1)f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

4. 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int dx$

(2) $\int 2x dx$

(3) $\int x^2 dx$

5. 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (x^2-6x+4)dx$

(2) $\int (2t+1)(t-3)dt$

(3) $\int (x+2)^3dx-\int (x-2)^3dx$

6. 不定積分 $\int (x-1)^2(x+1)dx$ を求めよ。

7. (1) $f'(x)=(2x-4)(1-3x)$ で $f(1)=0$ となる関数 $f(x)$ を求めよ。
(2) 曲線 $y=f(x)$ は点 A (1, -1) を通り，その曲線上の点 P (x , $f(x)$) における接線の傾きは $3x^2-4x$ で表される。この曲線の方程式を求めよ。

8. 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-1}^2(4x^2-x+3)dx$

(2) $\int_{-1}^2(2x^2+3x)dx-\int_{-1}^2x(2x+1)dx$

(3) $\int_{-3}^3(3x^2-4x)dx-\int_4^3x(3x-4)dx$

9. 定積分 $\int_{-2}^2 (x-1)(2x^2-3x+1)dx$ を求めよ。

10. 次の曲線，直線と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

- (1) $y=x^2-x-2$
- (2) $y=-x^2+3x$ ($-1\leq x\leq 2$), $x=-1$, $x=2$

11. 次の曲線や直線で囲まれた図形の面積を求めよ。

- (1) $y=-x^2+3x+2$, $y=x-1$
- (2) $y=x^2+1$, $y=-x^2+x+2$

12. 関数 $y=2x^3-x^2-2x+1$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

13. 次の定積分を求めよ。

- (1) $\int_0^3 |x^2-2x|dx$
- (2) $\int_0^3 x|x-1|dx$

14. $y=f(x)$ は次の性質 (A), (B), (C) を満たすものとする。

- (A) $y=f(x)$ のグラフは $y=x^2$ のグラフを平行移動したものである。
- (B) $f(1)=0$
- (C) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積は $\frac{1}{6}$ である。

このとき， $f(x)$ を求めよ。

1. 次の関数 $f(x)$ の $-3 \leq x \leq 3$ における最大値と最小値を求めよ。

$$f(x) = \int_{-3}^x (t^2 + t - 2) dt$$

解答 $x=3$ で最大値 6 , $x=1$ で最小値 $-\frac{8}{3}$

解説

$f'(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$
 $f'(x) = 0$ とすると $x=1, -2$
 $-3 \leq x \leq 3$ における $f(x)$ の増減表は、次のようになる。

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	6

また $f(x) = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - 2t \right]_{-3}^x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{3}{2}$

したがって $f(-2) = -\frac{8}{3} + 2 + 4 - \frac{3}{2} = \frac{11}{6}$

$$f(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 - \frac{3}{2} = -\frac{8}{3}$$

$$f(3) = 9 + \frac{9}{2} - 6 - \frac{3}{2} = 6$$

よって、 $x=3$ で最大値 6 , $x=1$ で最小値 $-\frac{8}{3}$ をとる。

2. 放物線 $y=x(3-x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を、直線 $y=ax$ が 2 等分するとき、 a の値を求めよ。

解答 $3 - \frac{3}{\sqrt[3]{2}}$

解説

放物線 $y=x(3-x)$ …… ① と直線 $y=ax$ …… ②

の交点の x 座標は、 $x(3-x)=ax$ の解である。

これを解いて $x\{x-(3-a)\}=0$

よって $x=0, 3-a$

図から $a>0$ かつ $3-a>0$

すなわち $0<a<3$

放物線 ① と直線 ② で囲まれた図形の面積を S_1

とすると

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{3-a} \{x(3-x) - ax\} dx = -\int_0^{3-a} x\{x-(3-a)\} dx \\ &= \frac{1}{6} [(3-a) - 0]^3 = \frac{(3-a)^3}{6} \end{aligned}$$

放物線 ① と x 軸で囲まれた図形の面積を S とすると、 S は $S_1 = \frac{(3-a)^3}{6}$ に $a=0$ を

代入したものと等しいから $S = \frac{9}{2}$

条件より、 $S=2S_1$ であるから $\frac{9}{2} = 2 \cdot \frac{(3-a)^3}{6}$

ゆえに $(3-a)^3 = \frac{27}{2}$

よって、 $3-a = \frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ から $a = 3 - \frac{3}{\sqrt[3]{2}}$

これは $0 < a < 3$ を満たす。

3. 等式 $f(x) = 1 + 2 \int_0^1 (xt+1)f(t) dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

解答 $f(x) = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$

解説

注意 $\int_0^1 f(t) dt$ と $\int_0^1 tf(t) dt$ は中身が違うから計算結果も違う。よって別々の文字でおく

右辺を変形して $f(x) = 1 + 2x \int_0^1 tf(t) dt + 2 \int_0^1 f(t) dt$

$\int_0^1 tf(t) dt = a, \int_0^1 f(t) dt = b$ とおくと、 a, b は定数であり

$$f(x) = 2ax + 2b + 1$$

よって $a = \int_0^1 t(2at + 2b + 1) dt = \int_0^1 \{2at^2 + (2b+1)t\} dt$
 $= \left[\frac{2}{3}at^3 + \frac{2b+1}{2}t^2 \right]_0^1$
 $= \frac{2}{3}a + \frac{2b+1}{2}$

ゆえに $2a - 6b - 3 = 0$ …… ①

一方 $b = \int_0^1 (2at + 2b + 1) dt = \left[at^2 + (2b+1)t \right]_0^1$
 $= a + 2b + 1$

よって $a + b + 1 = 0$ …… ②

①, ② を連立して解くと $a = -\frac{3}{8}, b = -\frac{5}{8}$

ゆえに $f(x) = 2\left(-\frac{3}{8}\right)x + 2\left(-\frac{5}{8}\right) + 1 = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$

4. 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int dx$

(2) $\int 2x dx$

(3) $\int x^2 dx$

解答 C は積分定数とする。

(1) $x + C$ (2) $x^2 + C$ (3) $\frac{x^3}{3} + C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $(x)' = 1$ であるから $\int dx = \int 1 dx = x + C$

(2) $(x^2)' = 2x$ であるから $\int 2x dx = x^2 + C$

(3) $\int x^2 dx = \frac{1}{2+1} x^{2+1} + C = \frac{x^3}{3} + C$

5. 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (x^2 - 6x + 4) dx$

(2) $\int (2t+1)(t-3) dt$

(3) $\int (x+2)^3 dx - \int (x-2)^3 dx$

解答 (1) $\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 4x + C$ (C は積分定数)

(2) $\frac{2}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 - 3t + C$ (C は積分定数) (3) $4x^3 + 16x + C$ (C は積分定数)

解説

(1) $\int (x^2 - 6x + 4) dx = \int x^2 dx - 6 \int x dx + 4 \int dx$
 $= \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 4x + C$ (C は積分定数)

(2) $\int (2t+1)(t-3) dt = \int (2t^2 - 5t - 3) dt = \frac{2}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 - 3t + C$ (C は積分定数)

(3) $\int (x+2)^3 dx - \int (x-2)^3 dx = \int \{(x+2)^3 - (x-2)^3\} dx = \int (12x^2 + 16) dx$
 $= 4x^3 + 16x + C$ (C は積分定数)

6. 不定積分 $\int (x-1)^2(x+1) dx$ を求めよ。

解答 $\frac{1}{12}(x-1)^3(3x+5) + C$ (C は積分定数)

解説

ヒント $(x-1)^2$ の塊を壊さないように、逆に $x+1$ を $(x-1)+2$ と変形する

$$\begin{aligned} \int (x-1)^2(x+1) dx &= \int (x-1)^2\{(x-1)+2\} dx \\ &= \int \{(x-1)^3 + 2(x-1)^2\} dx \\ &= \int (x-1)^3 dx + 2 \int (x-1)^2 dx \\ &= \frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{2}{3}(x-1)^3 + C \\ &= \frac{3}{12}(x-1)^4 + \frac{8}{12}(x-1)^3 + C \\ &= \frac{1}{12}(x-1)^3\{3(x-1)+8\} + C \\ &= \frac{1}{12}(x-1)^3(3x+5) + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

7. (1) $f'(x) = (2x-4)(1-3x)$ で $f(1) = 0$ となる関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ は点 A (1, -1) を通り、その曲線上の点 P(x, f(x)) における接線の傾きは $3x^2 - 4x$ で表される。この曲線の方程式を求めよ。

解答 (1) $f(x) = -2x^3 + 7x^2 - 4x - 1$ (2) $y = x^3 - 2x^2$

解説

(1) $f(x) = \int f'(x) dx = \int (2x-4)(1-3x) dx$
 $= \int (-6x^2 + 14x - 4) dx$
 $= -2x^3 + 7x^2 - 4x + C$ (C は積分定数)

$f(1) = 0$ から $-2 + 7 - 4 + C = 0$

よって $C = -1$

したがって $f(x) = -2x^3 + 7x^2 - 4x - 1$

(2) x 座標が a である点における接線の傾きは $f'(a)$ であった。

今、点 $(x, f(x))$ における接線の傾きが $3x^2 - 4x$ であるから

$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$

よって $f(x) = \int f'(x) dx = \int (3x^2 - 4x) dx$
 $= x^3 - 2x^2 + C$ (C は積分定数)

曲線 $y=f(x)$ は点 A (1, -1) を通るから $f(1) = -1$

ゆえに $1 - 2 + C = -1$ よって $C = 0$

したがって $y = x^3 - 2x^2$
 8. 次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_{-1}^2 (4x^2 - x + 3) dx \quad (2) \int_{-1}^2 (2x^2 + 3x) dx - \int_{-1}^2 x(2x + 1) dx$$

$$(3) \int_{-3}^3 (3x^2 - 4x) dx - \int_4^3 x(3x - 4) dx$$

解答 (1) $\frac{39}{2}$ (2) 3 (3) 77

解説

$$(1) \int_{-1}^2 (4x^2 - x + 3) dx = 4 \int_{-1}^2 x^2 dx - \int_{-1}^2 x dx + 3 \int_{-1}^2 dx$$

$$= 4 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 - \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^2 + 3 \left[x \right]_{-1}^2$$

$$= 4 \left(\frac{8}{3} + \frac{1}{3} \right) - \left(2 - \frac{1}{2} \right) + 3(2 + 1) = \frac{39}{2}$$

(2) **ヒント** 積分区間が同じものはまとめられる

$$\int_{-1}^2 (2x^2 + 3x) dx - \int_{-1}^2 x(2x + 1) dx = \int_{-1}^2 \{(2x^2 + 3x) - (2x^2 + x)\} dx$$

$$= \int_{-1}^2 2x dx = \left[x^2 \right]_{-1}^2 = 4 - 1 = 3$$

(3) **ヒント** 中身が同じで積分区間が $a \rightarrow b \rightarrow c$ となっているものは、まとめられる

$$\int_{-3}^3 (3x^2 - 4x) dx - \int_4^3 x(3x - 4) dx = \int_{-3}^3 (3x^2 - 4x) dx + \int_3^4 (3x^2 - 4x) dx$$

$$= \int_{-3}^4 (3x^2 - 4x) dx = \left[x^3 - 2x^2 \right]_{-3}^4$$

$$= (64 - 32) - (-27 - 18) = 77$$

9. 定積分 $\int_{-2}^2 (x - 1)(2x^2 - 3x + 1) dx$ を求めよ。

解答 $-\frac{92}{3}$

解説

ヒント 積分区間が $-a$ から a までなので、指数が奇数のものは0になる。

$$\int_{-2}^2 (x - 1)(2x^2 - 3x + 1) dx = \int_{-2}^2 (2x^3 - 5x^2 + 4x - 1) dx$$

$$= \int_{-2}^2 (2x^3 + 4x) dx + \int_{-2}^2 (-5x^2 - 1) dx$$

$$= 0 + 2 \int_0^2 (-5x^2 - 1) dx$$

$$= -2 \left[\frac{5}{3} x^3 + x \right]_0^2$$

$$= -2 \left(\frac{40}{3} + 2 \right) = -\frac{92}{3}$$

10. 次の曲線、直線と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

- (1) $y = x^2 - x - 2$
 (2) $y = -x^2 + 3x$ ($-1 \leq x \leq 2$), $x = -1$, $x = 2$

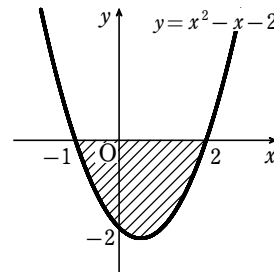
解答 (1) $\frac{9}{2}$ (2) $\frac{31}{6}$

解説

- (1) 曲線 $y = x^2 - x - 2$ と x 軸の交点の x 座標は、
 $x^2 - x - 2 = 0$ の解である。
 これを解いて $(x + 1)(x - 2) = 0$
 よって $x = -1, 2$
 $-1 \leq x \leq 2$ において $y \leq 0$ であるから、求める面積
 S は

$$S = - \int_{-1}^2 (x^2 - x - 2) dx = - \int_{-1}^2 (x + 1)(x - 2) dx$$

$$= - \left(-\frac{1}{6} \right) [2 - (-1)]^3 = \frac{9}{2}$$

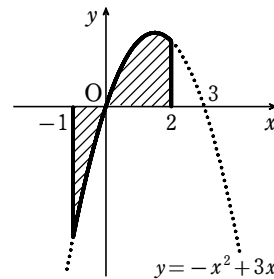


- (2) 曲線 $y = -x^2 + 3x$ と x 軸の交点の x 座標は、
 $-x^2 + 3x = 0$ すなわち $x^2 - 3x = 0$ の解である。
 これを解いて $x(x - 3) = 0$
 よって $x = 0, 3$
 $-1 \leq x \leq 0$ において x 軸よりも下、 $0 \leq x \leq 2$ において
 x 軸よりも上であるから、求める面積 S は

$$S = - \int_{-1}^0 (-x^2 + 3x) dx + \int_0^2 (-x^2 + 3x) dx$$

$$= - \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2} x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2} x^2 \right]_0^2$$

$$= - \left\{ -\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2} \right) \right\} + \left(-\frac{8}{3} + 6 \right) = \frac{31}{6}$$



11. 次の曲線や直線で囲まれた図形の面積を求めよ。

- (1) $y = -x^2 + 3x + 2$, $y = x - 1$ (2) $y = x^2 + 1$, $y = -x^2 + x + 2$

解答 (1) $\frac{32}{3}$ (2) $\frac{9}{8}$

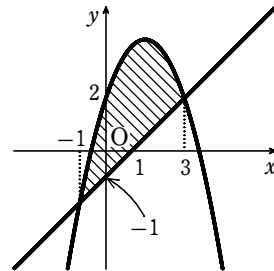
解説

- (1) 放物線と直線の交点の x 座標は、
 $-x^2 + 3x + 2 = x - 1$ すなわち $x^2 - 2x - 3 = 0$
 の解である。
 これを解いて $(x + 1)(x - 3) = 0$
 よって $x = -1, 3$
 ゆえに、右の図から求める面積 S は

$$S = \int_{-1}^3 \{(-x^2 + 3x + 2) - (x - 1)\} dx$$

$$= \int_{-1}^3 (-x^2 + 2x + 3) dx$$

$$= - \int_{-1}^3 (x + 1)(x - 3) dx = - \left(-\frac{1}{6} \right) [3 - (-1)]^3 = \frac{1}{6} \cdot 4^3 = \frac{32}{3}$$

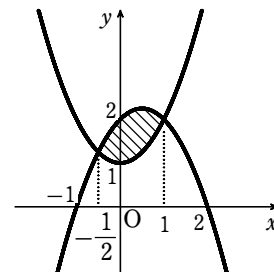


- (2) 2 曲線の交点の x 座標は、 $x^2 + 1 = -x^2 + x + 2$
 すなわち $2x^2 - x - 1 = 0$ の解である。
 これを解いて $(2x + 1)(x - 1) = 0$
 よって $x = -\frac{1}{2}, 1$

ゆえに、右の図から求める面積 S は

$$S = \int_{-\frac{1}{2}}^1 \{(-x^2 + x + 2) - (x^2 + 1)\} dx$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^1 (-2x^2 + x + 1) dx$$



$$= - \int_{-\frac{1}{2}}^1 (2x + 1)(x - 1) dx$$

$$= -2 \int_{-\frac{1}{2}}^1 \left(x + \frac{1}{2} \right) (x - 1) dx$$

$$= -2 \left(-\frac{1}{6} \right) \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} \right) \right\}^3 = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} \right)^3 = \frac{9}{8}$$

12. 関数 $y = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

解答 $\frac{71}{48}$

解説

曲線 $y = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$ と x 軸の交点の x 座標は、 $2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ の解である。
 $f(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$ とすると $f(1) = 2 - 1 - 2 + 1 = 0$

$$\text{よって } f(x) = (x - 1)(2x^2 + x - 1)$$

$$= (x - 1)(x + 1)(2x - 1)$$

$$f(x) = 0 \text{ を解いて } x = 1, -1, \frac{1}{2}$$

また、曲線は右の図のようになり

$$-1 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ において } x \text{ 軸より上,}$$

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ において } x \text{ 軸より下}$$

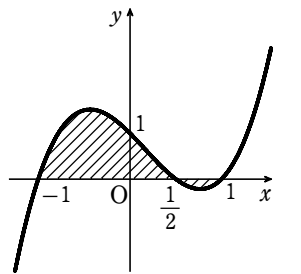
ゆえに、求める面積 S は

$$S = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (2x^3 - x^2 - 2x + 1) dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x^3 - x^2 - 2x + 1) dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_{-1}^{\frac{1}{2}} - \left[\frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$= 2 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^4 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^3 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \right\} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 2 \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)$$

$$= \frac{71}{48}$$



13. 次の定積分を求めよ。

- (1) $\int_0^3 |x^2 - 2x| dx$ (2) $\int_0^3 x|x - 1| dx$

解答 (1) $\frac{8}{3}$ (2) $\frac{29}{6}$

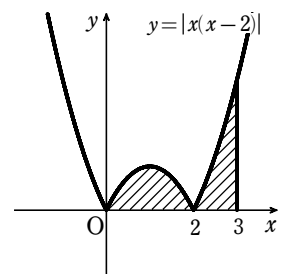
解説

- (1) $x^2 - 2x = x(x - 2)$ であるから
 $0 \leq x \leq 2$ のとき $|x^2 - 2x| = -(x^2 - 2x)$
 $2 \leq x \leq 3$ のとき $|x^2 - 2x| = x^2 - 2x$
 よって

$$\int_0^3 |x^2 - 2x| dx = \int_0^2 \{-(x^2 - 2x)\} dx + \int_2^3 (x^2 - 2x) dx$$

$$= - \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_2^3$$

$$= -2 \left(\frac{2^3}{3} - 2^2 \right) + \left(\frac{3^3}{3} - 3^2 \right)$$

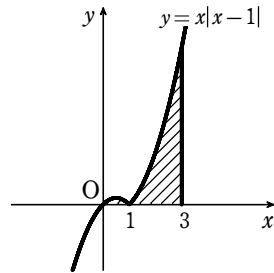


$$= -2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

$$(2) \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ のとき} \quad |x-1| = -(x-1) \\ 1 \leq x \leq 3 \text{ のとき} \quad |x-1| = x-1$$

よって

$$\begin{aligned} \int_0^3 x|x-1|dx &= \int_0^1 \{-x(x-1)\}dx + \int_1^3 x(x-1)dx \\ &= -\int_0^1 x(x-1)dx + \int_1^3 (x^2-x)dx \\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right)(1-0)^3 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^3 \\ &= \frac{1}{6} + \frac{3^3-1^3}{3} - \frac{3^2-1^2}{2} = \frac{29}{6} \end{aligned}$$



14. $y=f(x)$ は次の性質 (A), (B), (C) を満たすものとする。

(A) $y=f(x)$ のグラフは $y=x^2$ のグラフを平行移動したものである。

(B) $f(1)=0$

(C) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積は $\frac{1}{6}$ である。

このとき、 $f(x)$ を求めよ。

解答 $f(x)=x^2-3x+2$ または $f(x)=x^2-x$

解説

(A) から $y=x^2$ のグラフを平行移動したもののなので、 $y=f(x)$ のグラフは x^2 の係数は 1 である放物線である。また (B) から、 $y=f(x)$ のグラフは点 $(1,0)$ を通るので、もう 1 つの x 軸との交点を $(a,0)$ とすると

$$f(x)=(x-1)(x-a)$$

とおくことができる。ここで (C) から、 x 軸と $y=f(x)$ で囲まれた部分の面積が存在するので、 $y=f(x)$ は x 軸と異なる 2 点で交わっている。つまり、 $a \neq 1$

ここで、 a が 1 より大きいかわ小さいかで場合分けをする。

[1] $a > 1$ のとき (C) から

$$-\int_1^a (x-1)(x-a)dx = -\left(-\frac{1}{6}\right)(a-1)^3 = \frac{1}{6}$$

$$\text{よって } (a-1)^3 = 1 \quad \text{ゆえに } a = 2$$

これは条件を満たす。

$$\text{このとき } f(x) = (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$$

[2] $a < 1$ のとき (C) から

$$-\int_a^1 (x-1)(x-a)dx = -\left(-\frac{1}{6}\right)(1-a)^3 = \frac{1}{6}$$

$$\text{よって } (1-a)^3 = 1 \quad \text{ゆえに } a = 0$$

これは条件を満たす。

$$\text{このとき } f(x) = (x-1)x = x^2 - x$$

[1], [2] から $f(x)=x^2-3x+2$ または $f(x)=x^2-x$

