数学演習（積分法）　Ｈ２２．１１．１９　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

１．等式 $\int_a^x f(t)\,dt = 3x^2 - 2x - 1$ を満たす関数 $f(x)$，および定数 a の値を求めよ。

２．次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x) = 2x^2 + 1 + \int_0^1 x f(t)\,dt$$

３．等式 $f(x) = 3x^2 - x + \int_{-1}^1 f(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

４．(1)　関数 $f(x) = \int_0^x (4t-3)dt$，$g(x) = \int_1^x (3t^2 - 4t + 1)dt$ を x で微分せよ。

(2)　等式 $\int_a^x f(t)\,dt + \int_0^1 f(x)\,dx = x^2 + 3x + 2$ を満たす関数 $f(x)$，および定数 a の値を求めよ。

５．等式 $f(x) = 1 + 2\int_0^1 (xt+1) f(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

６．関数 $f(x) = \int_{-1}^x (2t^2 - 3t + 1)dt$ の極値を求めよ。

7．次の関数 $f(x)$ の $-3 \leqq x \leqq 3$ における最大値と最小値を求めよ。

$$f(x)=\int_{-3}^{x}(t^2+t-2)\,dt$$

8．(1)　定積分 $\int_{1}^{x}(2t+2)\,dt$ を x の多項式で表せ。

(2)　等式 $\int_{a}^{x}f(t)\,dt=x^2+2x-3$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

9．(1)　関数 $g(x)=\int_{x}^{2}t(1-t)\,dt$ を微分せよ。

(2)　次の等式を満たす関数 $f(x)$ および定数 a の値を求めよ。

（ア）$\int_{a}^{x}f(t)\,dt=x^2+5x-6$　　（イ）$\int_{1}^{x}tf(t)\,dt=x^3+2x^2+a$

10．放物線 $y=x(x-1)$ と直線 $y=ax$ で囲まれた部分の面積が x 軸で 2 等分されるときの定数 a の値を求めよ。

11．放物線 $y=x(3-x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を，直線 $y=ax$ が 2 等分するとき，a の値を求めよ。

12．直線 $y=ax$ と曲線 $y=-x^2+8x$ があり，$x>0$，$y>0$ の範囲で交点をもつものとする。

(1)　a の値の範囲を求めよ。

(2)　直線と曲線に囲まれた図形の面積を S_1，この直線と曲線および x 軸に囲まれた図形の面積を S_2 とすると $S_1 : S_2=1 : 7$ となる。このときの a の値を求めよ。

1．等式 $\int_a^x f(t)\,dt=3x^2-2x-1$ を満たす関数 $f(x)$，および定数 a の値を求めよ。

解答　$f(x)=6x-2$；$a=1,\ -\dfrac{1}{3}$

解説

等式の両辺の関数を x で微分すると　$f(x)=6x-2$

また，与えられた等式で $x=a$ とおくと，左辺は 0 になるから

$$0=3a^2-2a-1$$

ゆえに　$(a-1)(3a+1)=0$　　よって　$a=1,\ -\dfrac{1}{3}$

2．次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x)=2x^2+1+\int_0^1 xf(t)\,dt$$

解答　$f(x)=2x^2+\dfrac{10}{3}x+1$

解説

注意　積分の中にxが入っていたら外に出すこと

x は積分変数 t に無関係であるから　$\int_0^1 xf(t)\,dt=x\int_0^1 f(t)\,dt$

$\int_0^1 f(t)\,dt$ は定数であるから，$\int_0^1 f(t)\,dt=k$ とおくと

$$f(x)=2x^2+1+xk$$

よって　$k=\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1(2t^2+kt+1)dt=\left[\dfrac{2}{3}t^3+\dfrac{k}{2}t^2+t\right]_0^1$

$=\dfrac{2}{3}+\dfrac{k}{2}+1$

すなわち　$k=\dfrac{k}{2}+\dfrac{5}{3}$　　これを解いて　$k=\dfrac{10}{3}$

したがって　$f(x)=2x^2+\dfrac{10}{3}x+1$

3．等式 $f(x)=3x^2-x+\int_{-1}^1 f(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

解答　$f(x)=3x^2-x-2$

解説

$\int_{-1}^1 f(t)\,dt$ は定数であるから，$\int_{-1}^1 f(t)\,dt=k$ とおくと

$$f(x)=3x^2-x+k$$

よって　$k=\int_{-1}^1 f(t)\,dt=\int_{-1}^1(3t^2-t+k)dt=2\int_0^1(3t^2+k)dt$

$=2\left[t^3+kt\right]_0^1=2(1+k)$

すなわち　$k=2(1+k)$　　これを解いて　$k=-2$

したがって　$f(x)=3x^2-x-2$

4．(1)　関数 $f(x)=\int_0^x(4t-3)dt$，$g(x)=\int_1^x(3t^2-4t+1)dt$ を x で微分せよ。

(2)　等式 $\int_a^x f(t)\,dt+\int_0^1 f(x)\,dx=x^2+3x+2$ を満たす関数 $f(x)$，および定数 a の値を求めよ。

解答　(1)　$f'(x)=4x-3$，$g'(x)=3x^2-4x+1$　　(2)　$f(x)=2x+3$，$a=\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$

解説

(1)　$f'(x)=4x-3$，$g'(x)=3x^2-4x+1$

(2)　$\int_0^1 f(x)\,dx$ は定数で，等式の両辺の関数を x で微分すると

$$f(x)=2x+3$$

また，等式において $x=a$ とおくと

$$0+\int_0^1(2x+3)dx=a^2+3a+2$$

ここで　$\int_0^1(2x+3)dx=\left[x^2+3x\right]_0^1=4$

ゆえに　$4=a^2+3a+2$　　よって　$a^2+3a-2=0$

これを解いて　$a=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1}=\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$

5．等式 $f(x)=1+2\int_0^1(xt+1)f(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

解答　$f(x)=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4}$

解説

注意　$\int_0^1 f(t)dt$ と $\int_0^1 tf(t)dt$ は中身が違うから計算結果も違う。よって別々の文字でおく

右辺を変形して　$f(x)=1+2x\int_0^1 tf(t)\,dt+2\int_0^1 f(t)\,dt$

$\int_0^1 tf(t)\,dt=a$，$\int_0^1 f(t)\,dt=b$ とおくと，a，b は定数であり

$$f(x)=2ax+2b+1$$

よって　$a=\int_0^1 t(2at+2b+1)dt=\int_0^1\{2at^2+(2b+1)t\}dt$

$=\left[\dfrac{2}{3}at^3+\dfrac{2b+1}{2}t^2\right]_0^1$

$=\dfrac{2}{3}a+\dfrac{2b+1}{2}$

ゆえに　$2a-6b-3=0$　……①

一方　$b=\int_0^1(2at+2b+1)dt=\left[at^2+(2b+1)t\right]_0^1$

$=a+2b+1$

よって　$a+b+1=0$　……②

①，② を連立して解くと　$a=-\dfrac{3}{8}$，$b=-\dfrac{5}{8}$

ゆえに　$f(x)=2\left(-\dfrac{3}{8}\right)x+2\left(-\dfrac{5}{8}\right)+1=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4}$

6．関数 $f(x)=\int_{-1}^x(2t^2-3t+1)dt$ の極値を求めよ。

解答　$x=\dfrac{1}{2}$ で極大値 $\dfrac{27}{8}$，$x=1$ で極小値 $\dfrac{10}{3}$

解説

ヒント　微分すると積分の中身が出てくる

$f'(x)=2x^2-3x+1=(x-1)(2x-1)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=\dfrac{1}{2},\ 1$

よって，$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	……	$\frac{1}{2}$	……	1	……
$f'(x)$	＋	0	－	0	＋
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

また　$f(x)=\int_{-1}^x(2t^2-3t+1)dt=\left[\dfrac{2}{3}t^3-\dfrac{3}{2}t^2+t\right]_{-1}^x$

$=\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+x+\dfrac{19}{6}$

ゆえに　$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^3-\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}+\dfrac{19}{6}=\dfrac{27}{8}$

$f(1)=\dfrac{2}{3}\cdot1^3-\dfrac{3}{2}\cdot1^2+1+\dfrac{19}{6}=\dfrac{10}{3}$

よって，$f(x)$ は，$x=\dfrac{1}{2}$ で極大値 $\dfrac{27}{8}$ をとり，$x=1$ で極小値 $\dfrac{10}{3}$ をとる。

7．次の関数 $f(x)$ の $-3\leqq x\leqq3$ における最大値と最小値を求めよ。

$$f(x)=\int_{-3}^x(t^2+t-2)dt$$

解答　$x=3$ で最大値 6，$x=1$ で最小値 $-\dfrac{8}{3}$

解説

$f'(x)=x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=1,\ -2$

$-3\leqq x\leqq3$ における $f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	-3	…	-2	…	1	…	3
$f'(x)$		＋	0	－	0	＋	
$f(x)$	0	↗	極大	↘	極小	↗	6

また　$f(x)=\left[\dfrac{t^3}{3}+\dfrac{t^2}{2}-2t\right]_{-3}^x=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-2x-\dfrac{3}{2}$

したがって　$f(-2)=-\dfrac{8}{3}+2+4-\dfrac{3}{2}=\dfrac{11}{6}$

$f(1)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}-2-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{8}{3}$

$f(3)=9+\dfrac{9}{2}-6-\dfrac{3}{2}=6$

よって，$x=3$ で最大値 6，$x=1$ で最小値 $-\dfrac{8}{3}$ をとる。

8．(1)　定積分 $\int_1^x (2t+2)dt$ を x の多項式で表せ。

(2)　等式 $\int_a^x f(t)\,dt = x^2+2x-3$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

解答　(1)　x^2+2x-3　　(2)　$f(x)=2x+2$；$a=1,\ -3$

解説

(1)　$\int_1^x (2t+2)dt=\Big[t^2+2t\Big]_1^x=(x^2+2x)-(1^2+2\cdot 1)$

$=x^2+2x-3$

(2)　等式の両辺の関数を x で微分すると　$f(x)=2x+2$

また，与えられた等式で $x=a$ とおくと

(左辺)$=\int_a^a f(t)dt=0$ であるから　　$0=a^2+2a-3$

よって　　$(a-1)(a+3)=0$

したがって　$a=1,\ -3$

9．(1)　関数 $g(x)=\int_x^2 t(1-t)dt$ を微分せよ。

(2)　次の等式を満たす関数 $f(x)$ および定数 a の値を求めよ。

（ア）　$\int_a^x f(t)\,dt=x^2+5x-6$　　　（イ）　$\int_1^x tf(t)\,dt=x^3+2x^2+a$

解答　(1)　$g'(x)=x^2-x$

(2)　（ア）　$f(x)=2x+5$；$a=1,\ -6$　　（イ）　$f(x)=3x+4$，$a=-3$

解説

注意　微分して中身が出てくるのは $\int_a^x f(t)dt$ のように上端がxのときである。

$\int_x^a f(t)dt$のように下端にxがあったら，$\int_x^a f(t)dt=-\int_a^x f(x)dt$ と変形する

(1)　$g(x)=-\int_2^x t(1-t)\,dt$　であるから

$g'(x)=-x(1-x)=x^2-x$

(2)　（ア）　$\int_a^x f(t)\,dt=x^2+5x-6$ ……① とする。

① の両辺を x で微分すると　　$f(x)=2x+5$

また，① において $x=a$ とおくと，左辺は 0 になるから

$0=a^2+5a-6$　すなわち　$(a-1)(a+6)=0$

これを解いて　　$a=1,\ -6$

（イ）　$\int_1^x tf(t)\,dt=x^3+2x^2+a$ ……① とする。

① の両辺を x で微分すると　　$xf(x)=3x^2+4x$

したがって，$f(x)=3x+4$

また，① において $x=1$ とおくと，左辺は 0 になるから

$0=1+2+a$　　　よって　　$a=-3$

10．放物線 $y=x(x-1)$ と直線 $y=ax$ で囲まれた部分の面積が x 軸で 2 等分されるときの定数 a の値を求めよ。

解答　$a=\sqrt[3]{2}-1$

解説

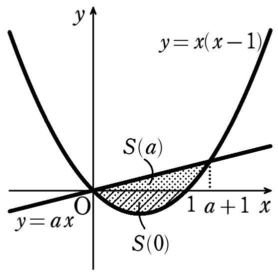
放物線と直線の交点の x 座標は，方程式

$x(x-1)=ax$　すなわち　$x(x-a-1)=0$

を解いて　　$x=0,\ a+1$

題意から　　$a\geqq 0$

このとき，放物線と直線で囲まれた部分の面積は，a の関数で表されるから，これを $S(a)$ とすると



$S(a)=\int_0^{a+1}\{ax-x(x-1)\}dx$

$=\int_0^{a+1}\{-x^2+(a+1)x\}dx$

$=-\int_0^{a+1}x\{x-(a+1)\}dx$

$=-\frac{-1}{6}(a+1-0)^3=\frac{1}{6}(a+1)^3$

放物線と x 軸で囲まれた部分の面積は $S(0)$ であり，題意を満たすための条件は

$S(a)=2S(0)$　すなわち　$\frac{1}{6}(a+1)^3=2\cdot\frac{1}{6}$

ゆえに　　$(a+1)^3=2$　　　よって　　$a+1=\sqrt[3]{2}$

したがって　　$a=\sqrt[3]{2}-1$ ($a\geqq 0$ を満たす)

11．放物線 $y=x(3-x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を，直線 $y=ax$ が 2 等分するとき，a の値を求めよ。

解答　$3-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$

解説

放物線 $y=x(3-x)$ ……① と直線 $y=ax$ ……②

の交点の x 座標は，$x(3-x)=ax$ の解である。

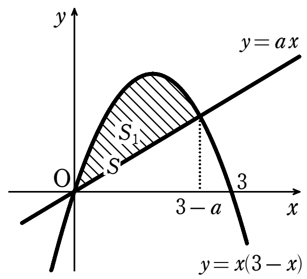
これを解いて　　$x\{x-(3-a)\}=0$

よって　　$x=0,\ 3-a$

図から　　$a>0$ かつ $3-a>0$

すなわち　$0<a<3$

放物線 ① と直線 ② で囲まれた図形の面積を S_1 とすると



$S_1=\int_0^{3-a}\{x(3-x)-ax\}dx=-\int_0^{3-a}x\{x-(3-a)\}dx$

$=\frac{1}{6}\{(3-a)-0\}^3=\frac{(3-a)^3}{6}$

放物線 ① と x 軸で囲まれた図形の面積を S とすると，S は $S_1=\frac{(3-a)^3}{6}$ に $a=0$ を代入したものと等しいから　　$S=\frac{9}{2}$

条件より，$S=2S_1$ であるから　　$\frac{9}{2}=2\cdot\frac{(3-a)^3}{6}$

ゆえに　　$(3-a)^3=\frac{27}{2}$

よって，$3-a=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ から　　$a=3-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$

これは $0<a<3$ を満たす。

12．直線 $y=ax$ と曲線 $y=-x^2+8x$ があり，$x>0$，$y>0$ の範囲で交点をもつものとする。

(1)　a の値の範囲を求めよ。

(2)　直線と曲線に囲まれた図形の面積を S_1，この直線と曲線および x 軸に囲まれた図形の面積を S_2 とすると $S_1:S_2=1:7$ となる。このときの a の値を求めよ。

解答　(1)　$0<a<8$　　(2)　$a=4$

解説

(1)　$ax=-x^2+8x$ とすると　　$x\{x-(8-a)\}=0$

これを解いて　　$x=0,\ 8-a$

$x=0$ のとき　　$y=0$,

$x=8-a$ のとき　　$y=a(8-a)$

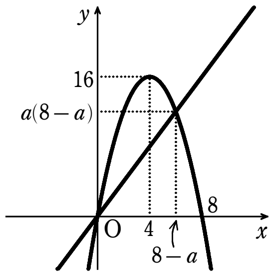
よって，与えられた直線と曲線の交点の座標は

$(0,\ 0)$ と $(8-a,\ a(8-a))$

$x>0$，$y>0$ の範囲で交点をもつから

$8-a>0$，$a(8-a)>0$

ゆえに　　$0<a<8$



(2)　$S_1=\int_0^{8-a}\{(-x^2+8x)-ax\}dx=-\int_0^{8-a}x\{x-(8-a)\}dx=\frac{1}{6}(8-a)^3$

S_1+S_2 は，$S_1=\frac{1}{6}(8-a)^3$ に $a=0$ を代入したものと等しいから　　$S_1+S_2=\frac{8^3}{6}$

条件より，$7S_1=S_2$ であるから　　$8S_1=S_1+S_2$

よって　　$8\cdot\frac{1}{6}(8-a)^3=\frac{8^3}{6}$　　　ゆえに　　$2^3(8-a)^3=8^3$

よって　　$2(8-a)=8$　　　したがって　　$a=4$

これは $0<a<8$ を満たす。