数学演習（微分法•積分法）Ｈ２１．２．１４　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

１. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a-3h)-f(a)}{h}$ を $f'(a)$ を用いて表せ。

２. $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{2x^2+ax+b}{x^2-2x-3}=\frac{5}{4}$ を満たす定数 a , b を求めよ。

３. $x\geqq 0$ のとき，$x^3+4\geqq 3x^2$ が成り立つことを証明せよ。

４. 曲線 $y=x^3-x+1$ と直線 $y=2x+a$ が２点で交わるとき，定数 a の値を求めよ。

５. 原点を通り，曲線 $y=x^3-3x^2-1$ に接するような直線の方程式を求めよ。

６. a は実数とする。関数 $f(x)=2x^3-3(a+2)x^2+12ax$ の極大値が３２となるとき，定数 a の値を求めよ。

７. $f(x)=x^2-1+\displaystyle\int_0^1 t^2 f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

８. $y=|x^2-2x|$ と $y=2x$ によって囲まれる部分の面積を求めよ。

９. 曲線 C：$y=x^3+x^2-2x+1$ がある。C 上の点 $(1,1)$ における接線と C で囲まれる図形の面積を求めよ。

第２回定期考査　H21. 2.14　　Class (　) No. (　) Name (こたえ.)

1 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a-3h)-f(a)}{h}$ を $f'(a)$ を用いて表せ。

$-3h = H$ とおくと $h=-\frac{1}{3}H$ そして $h\to 0$ のとき $H\to 0$.

よって $\lim_{h\to 0}\frac{f(a-3h)-f(a)}{h} = \lim_{H\to 0}\frac{f(a+H)-f(a)}{-\frac{1}{3}H} = -3\lim_{H\to 0}\frac{f(a+H)-f(a)}{H}$

$= -3f'(a)$

2 $\lim_{x\to 3}\frac{2x^2+ax+b}{x^2-2x-3}=\frac{5}{4}$ を満たす定数 a, b を求めよ。

$x\to 3$ の時 (分母) $\to 0$ より (分子) も 0 にならないといけない。

$\therefore\ 2\times 3^2 + a\times 3 + b = 0$　$\therefore\ b=-3a-18$.

よって

$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2+ax-3a-18}{x^2-2x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(2x+a+6)}{(x-3)(x+1)} = \lim_{x\to 3}\frac{2x+a+6}{x+1} = \frac{a+12}{4} = \frac{5}{4}$

$\therefore\ a=-7,\ b=3$

3 $x\geqq 0$ のとき、$x^3+4\geqq 3x^2$ が成り立つことを証明せよ。

$f(x) = (左辺)-(右辺) = x^3+4-3x^2$ とおく.

$f'(x) = 3x^2-6x = 3x(x-2)$

$f'(x)$ のグラフ

よって $x\geqq 0$ における増減表は

x	0	…	2	…
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	4	↘	0	↗

よって $x\geqq 0$ における $f(x)$ の最小値が 0 より $x\geqq 0$ において $f(x)\geqq 0$

$\therefore$ 成り立つ。

4 曲線 $y=x^3-x+1$ と直線 $y=2x+a$ が2点で交わるとき、a の値を求めよ。

方程式 $x^3-x+1=2x+a$ が2つの異なる実数解を持てばいい。

$f(x) = (x^3-x+1)-(2x+a) = x^3-3x+1-a$.

$f'(x) = 3x^2-3 = 3(x+1)(x-1)$　$f'(x)$ のグラフ

よって増減表は

x	…	-1	…	1	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$3-a$	↘	$-1-a$	↗
		極大		極小	

$f(x)=0$ の解が2つ

⇕

$f(x)$ の極大値 or 極小値 $=0$

⇕

$(3-a)(-1-a)=0$　$\therefore\ a=3,-1$

5 原点を通り、曲線 $y=x^3-3x^2-1$ に接するような直線の方程式を求めよ。

接点 $(t,\ t^3-3t^2-1)$ における接線の方程式は

$y'=3x^2-6x$ より $y-(t^3-3t^2-1)=(3t^2-6t)(x-t)$ ……※

原点を通るので $0-(t^3-3t^2-1)=(3t^2-6t)(0-t)$

整理して $2t^3-3t^2+1=0$.

$(2t+1)(t-1)^2=0$.　$t=1,\ -\frac{1}{2}$

この t の値を※に代入すると.

$t=1$ のとき $y=-3x$.　$t=-\frac{1}{2}$ のとき $y=\frac{15}{4}x$.

6 a は実数とする。関数 $f(x)=2x^3-3(a+2)x^2+12ax$ の極大値が 32 となるとき、a の値を求めよ。

$f'(x) = 6x^2-6(a+2)x+12a = 6(x-2)(x-a)$.　よって $f'(x)=0$ は $x=a,2$

$a<2$ の時

x	…	a	…	2	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

$x=a$ の時極大

このとき $f(a)=-a^3+6a^2$.

$a>2$ の時

x	…	2	…	a	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

$x=2$ の時 極大

このとき $f(2)=12a-8$.

・$a<2$ の時

$-a^3+6a^2=32$.

$\therefore\ (a+2)(a-4)^2=0$.

$a=-2,4$.

$a<2$ より $a=-2$.

・$a>2$ の時

$12a-8=32$.

$a=\frac{10}{3}$.

これは $a>2$ を満たす

以上より

$a=-2,\ \frac{10}{3}$

7 $f(x)=x^2-1+\int_0^1 t^2f(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$\int_0^1 t^2f(t)\,dt = a$ (定数) とおく.

よって $f(x)=x^2-1+a$ となるので $f(t)=t^2-1+a$

この時

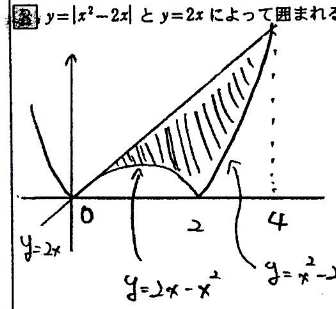
$a=\int_0^1 t^2f(t)\,dt = \int_0^1 t^2(t^2-1+a)\,dt$

$=\int_0^1(t^4-t^2+at^2)\,dt$

$=\left[\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{3}at^3\right]_0^1 = \frac{1}{5}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}a$

$\therefore\ a=\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}a$ より $a=-\frac{1}{5}$　よって $f(x)=x^2-1-\frac{1}{5}=x^2-\frac{6}{5}$

8 $y=|x^2-2x|$ と $y=2x$ によって囲まれる部分の面積を求めよ。



$y=2x$ と $y=|x^2-2x|$ の交点は $x=0,4$.

よって

$S=\int_0^2\{2x-(2x-x^2)\}dx + \int_2^4\{2x-(x^2-2x)\}dx$

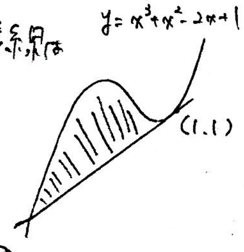
$=\int_0^2 x^2dx+\int_2^4(4x-x^2)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2+\left[2x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_2^4 = 8$

〈別解〉

$S=\int_0^4\{2x-(x^2-2x)\}dx - 2\int_0^2(2x-x^2)dx = \frac{1}{6}(4-0)^3-2\times\frac{1}{6}(2-0)^3 = 8$

9 曲線 C: $y=x^3+x^2-2x+1$ がある。C 上の点 $(1,1)$ における接線と C で囲まれる図形の面積を求めよ。



$y'=3x^2+2x-2$ より 点 $(1,1)$ における接線は

$y-1=(3\times 1^2+2\times 1-2)(x-1)$

$\therefore\ y=3x-2$.

曲線と接線との交点は.

$x^3+x^2-2x+1=3x-2$.

$\Leftrightarrow\ x^3+x^2-5x+3=0$

$\Leftrightarrow\ (x-1)^2(x+3)=0$　$\therefore\ x=1,-3$

公式

$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)^2dx = \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$

よって求める面積は

$\int_{-3}^1\{(x^3+x^2-2x+1)-(3x-2)\}dx$

$=\int_{-3}^1(x^3+x^2-5x+3)dx = \int_{-3}^1(x+3)(x-1)^2dx$

$=\frac{1}{12}\{1-(-3)\}^4 = \frac{64}{12} = \frac{64}{3}$

別

$\int_{-3}^1(x+3)(x-1)^2dx$

$=\int_{-3}^1\{(x-1)+4\}(x-1)^2dx$

$=\int_{-3}^1\{(x-1)^3+4(x-1)^2\}dx = \left[\frac{1}{4}(x-1)^4+\frac{4}{3}(x-1)^3\right]_{-3}^1 = \frac{64}{3}$