数学演習（積分法）Ｈ２０．１２．１７　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　)

１．次の不定積分･定積分を計算せよ。

(1) $\int (a-1)^3 da - \int (a+1)^3 da$

(2) $\int_x^{x+1} \left(3t^2+3t+\frac{3}{2}\right) dt$

(3) $\int_{-2}^{2} (x-1)^4 dx$

(4) $\int_1^{-2} (x^3-2x+1)dx - \int_2^{-2} (x^3-2x+1)dx - \int_2^{-1} (2x-1-x^3)dx$

２．次の曲線･直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $x=2y^2$, $x=y+3$

(2) $y=|2x^2-x-1|$, $x=0$, $x=2$, x軸

(3) $y=(x-2)^4(x+1)$, x軸

３．次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。なお、(2)については定数 a の値も求めよ。

(1) $f(x)=x^2+\int_0^3 tf(t)dt$

(2) $2x^3+1=ax^2+\int_a^x f(t)dt$

(3) $\frac{8}{3}x^3+6x^2+2x=\int_0^{2x-1} f(t)dt$

4. 曲線 $C: y=x^3$ 上の点 $\mathrm{P}(t, t^3)$ $(t>0)$ における接線を l とする。

(1) l の方程式を求めよ。

(2) l と C との交点について，接点P以外の交点の座標を求めよ。

(3) C と l とで囲まれた部分の面積のうち，y 軸の右側部分を S_1，左側部分を S_2 とするとき，$S_1 : S_2$ を簡単な整数比で求めよ。

5. 放物線 $y=x^2-2x$ と $(3, 4)$ を通る直線で囲まれた部分の面積を S とする。このとき，面積 S を最小にするような直線の方程式と，そのときの面積の値を求めよ。

6. 直線 $y=mx$ $(m>0)$ と放物線 $y=x^2-x$ とで囲まれた部分の面積が，x軸と $y=nx$ $(n<0)$ によって三等分されるように，定数 m, n の値を求めよ。

数学演習（積分法）Ｈ２０．１２．１７　　　　（　　）組（　　）番　名前（ こたえ ）

1．次の不定積分･定積分を計算せよ。

(1) $\int(a-1)^3da-\int(a+1)^3da$

$=\int\{(a-1)^3-(a+1)^3\}da$

$=\int\{(a^3-3a^2+3a-1)-(a^3+3a^2+3a+1)\}da$

$=\int(-6a^2-2)da=-2a^3-2a+C$

(5)

(2) $\int_x^{x+1}\left(3t^2+3t+\frac{3}{2}\right)dt$

$=\left[t^3+\frac{3}{2}t^2+\frac{3}{2}t\right]_x^{x+1}$

$=(x+1)^3+\frac{3}{2}(x+1)^2+\frac{3}{2}(x+1)-\left(x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x\right)$

$=(x^3+3x^2+3x+1)+\frac{3}{2}(x^2+2x+1)+\frac{3}{2}(x+1)$

$-\left(x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x\right)=3x^2+6x+4$

(5)

(3) $\int_{-2}^{2}(x-1)^4dx$

$=\left[\frac{1}{5}(x-1)^5\right]_{-2}^{2}$

$=\frac{1}{5}(2-1)^5-\frac{1}{5}(-2-1)^5=\frac{1}{5}(1+243)=\frac{244}{5}$

(5)

(4) $\int_1^{-2}(x^3-2x+1)dx-\int_2^{-2}(x^3-2x+1)dx-\int_2^{-1}(2x-1-x^3)dx$

$=\int_1^{-2}(x^3-2x+1)dx+\int_{-2}^{2}(x^3-2x+1)dx$

$+\int_{2}^{-1}(x^3-2x+1)dx$

$=\int_1^{-1}(x^3-2x+1)dx$

$=2\int_0^{-1}1\cdot dx=2[x]_0^{-1}=-2$

(5)

2．次の曲線･直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $x=2y^2$, $x=y+3$

交点　$2y^2=y+3$

$2y^2-y-3=0$

$(2y-3)(y+1)=0$　∴ $y=\frac{3}{2},-1$

∴ $S=\int_{-1}^{\frac{3}{2}}\{(y+3)-2y^2\}dy$

$=-\int_{-1}^{\frac{3}{2}}(2y^2-y-3)dy$

$=-2\int_{-1}^{\frac{3}{2}}\left(y-\frac{3}{2}\right)(y+1)dy$

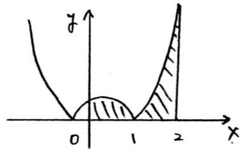
$=(-2)\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\left\{\frac{3}{2}-(-1)\right\}^3$

$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^3$

$=\frac{125}{24}$

(7)

(2) $y=|2x^2-x-1|$, $x=0$, $x=2$, x軸



$S=\int_0^1(-2x^2+x+1)dx+\int_1^2(2x^2-x-1)dx$

$=\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^1+\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-x\right]_1^2$

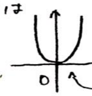
$=\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+1\right)+\left(\frac{16}{3}-2-2\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-1\right)$

$=3$

(7)

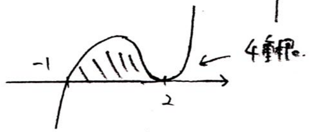
(3) $y=(x-2)^4(x+1)$, x軸

（ $y=x^4$は



こんな形 ）

$y=(x-2)^4(x+1)$ のグラフ



∴ $S=\int_{-1}^{2}(x-2)^4(x+1)dx$

$=\int_{-1}^{2}(x-2)^4(x-2+3)dx$

$=\int_{-1}^{2}\{(x-2)^5+3(x-2)^4\}dx$

$=\left[\frac{1}{6}(x-2)^6+\frac{3}{5}(x-2)^5\right]_{-1}^{2}$

$=0-\left\{\frac{1}{6}(-3)^6+\frac{3}{5}(-3)^5\right\}$

$=-\frac{1}{6}\cdot3^6+\frac{3}{5}\cdot3^5$

$=3^6\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{5}\right)$

$=3^6\cdot\frac{1}{30}=\frac{243}{10}$

(7)

3．次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。なお、(2)については定数 a の値も求めよ。

(1) $f(x)=x^2+\int_0^3tf(t)dt$

$\int_0^3tf(t)dt$ は定数より　$a=\int_0^3tf(t)dt$　とおくと

$f(x)=x^2+a$

∴ $a=\int_0^3t(t^2+a)dt$

$=\int_0^3(t^3+at)dt$

$=\left[\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{2}at^2\right]_0^3=\frac{81}{4}+\frac{9}{2}a$

∴ $a=\frac{81}{4}+\frac{9}{2}a$

より $a=-\frac{81}{14}$

∴ $f(x)=x^2-\frac{81}{14}$

(7)

(2) $2x^3+1=ax^2+\int_a^xf(t)dt$

$x=a$を代入して

$2a^3+1=a\cdot a^2+\int_a^af(t)dt$

∴ $2a^3+1=a^3$

より $a^3=-1$

aは実数より

$a=-1$

(4)

また

$2x^3+1=-x^2+\int_a^xf(t)dt$

∴ $\int_a^xf(t)dt=2x^3+x^2+1$

両辺xで微分して

$f(x)=6x^2+2x$

(3)

(3) $\frac{8}{3}x^3+6x^2+2x=\int_0^{2x-1}f(t)dt$　･･･(*)

$\boxed{\text{ポ　}2x-1\text{ の }x\text{ に何か関数 }g(x)\text{ を代入して、}2g(x)-1=x\text{ にしたい。つまり、これを解いて、}g(x)=\frac{x+1}{2}\text{ を代入}}$

(*)式の x に $\frac{x+1}{2}$ を代入すると

$\frac{8}{3}\left(\frac{x+1}{2}\right)^3+6\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+2\cdot\frac{x+1}{2}=\int_0^{2\cdot\frac{x+1}{2}-1}f(t)dt$

∴ $\int_0^xf(t)dt=\frac{1}{3}(x+1)^3+\frac{3}{2}(x+1)^2+(x+1)$

両辺xで微分すると

$f(x)=(x+1)^2+3(x+1)+1$

∴ 整理して

$f(x)=x^2+5x+5$

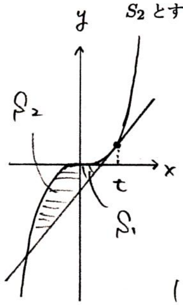
(7)

4 曲線 $C: y=x^3$ 上の点 P $(t,\ t^3)$ $(t>0)$ における接線を l とする。

(1) l の方程式を求めよ。

(2) l と C との接点 P 以外の交点を求めよ。

(3) C と l とで囲まれた面積のうち y 軸の右側部分を S_1、左側部分を S_2 とするとき $S_1 : S_2$ を求めよ。



(1) $y'=3x^2$ より

$y-t^3=3t^2(x-t)$

∴ $y=3t^2x-2t^3$ (4)

(2) $x^3=3t^2x-2t^3$

を解く。ここで、この方程式は $x=t$ を解に持つので

$$\begin{array}{r|rrrr} t & 1 & 0 & -3t^2 & 2t^3 \\ & & t & t^2 & -2t^3 \\ \hline & 1 & t & -2t^2 & 0 \end{array}$$

$x^3-3t^2x+2t^3$

$=(x-t)(x^2+tx-2t^2)$

$=(x-t)(x-t)(x+2t)$

$=(x-t)^2(x+2t)=0$

∴ $x=t,\ -2t$ より P以外の交点は $(-2t,\ -8t^3)$ (4)

(3) $S_1=\int_0^t\{x^3-(3t^2x-2t^3)\}dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}t^2x^2+2t^3x\right]_0^t$

$=\frac{1}{4}t^4-\frac{3}{2}t^4+2t^4$

$=\frac{3}{4}t^4$

$S_2=\int_{-2t}^0\{x^3-(3t^2x-2t^3)\}dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}t^2x^2+2t^3x\right]_{-2t}^0$

$=-\left\{\frac{1}{4}(-2t)^4-\frac{3}{2}t^2(-2t)^2+2t^3(-2t)\right\}$

$=-\frac{16}{4}t^4+\frac{12}{2}t^4+4t^4$

$=6t^4$

∴

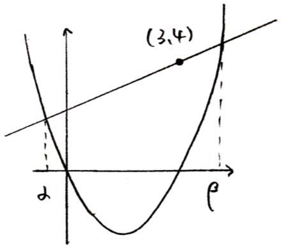
$S_1:S_2=\frac{3}{4}t^4:6t^4$

$=\frac{3}{4}:6$

$=3:24$

$=1:8$ (10)

5 放物線 $y=x^2-2x$ と $(3,\ 4)$ を通る直線で囲まれた部分の面積を S とする。このとき面積 S を最小にするような直線の方程式を求めよ。また、その最小の面積を求めよ。



(3,4)を通る直線は

傾きを m として

$y-4=m(x-3)$

∴ $y=mx-3m+4$

とおける。この時、放物線との交点は

$x^2-2x=mx-3m+4$

∴ $x^2-(m+2)x+3m-4=0$

の2解であり、ここで

$D=(m+2)^2-4\cdot1\cdot(3m-4)$

$=m^2+4m+4-12m+16$

$=m^2-8m+20$

$=(m-4)^2+4>0$

より、必ず異なる2つの解を持つ。

今、その2解を α, β $(\alpha<\beta)$ とすると

$\alpha=\frac{m+2-\sqrt{D}}{2}$, $\beta=\frac{m+2+\sqrt{D}}{2}$

であり そして

$S=\int_\alpha^\beta\{(mx-3m+4)-(x^2-2x)\}dx$

$=-\int_\alpha^\beta\{x^2-(m+2)x+3m-4\}dx$

$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$

$=-\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3$

$=\frac{1}{6}(\sqrt{D})^3$

$=\frac{1}{6}\left\{\sqrt{(m-4)^2+4}\right\}^3$ (6)

であるので、Sは

$m=4$ の時

最小値 $\frac{1}{6}(\sqrt{4})^3$

をとる。

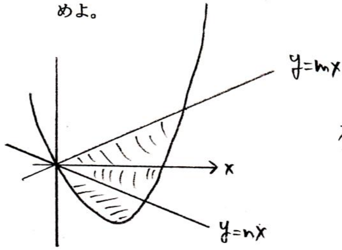
以上より

$y=4x-8$

の時、最小値

$\frac{4}{3}$ (10)

6 直線 $y=mx$ $(m>0)$ と放物線 $y=x^2-x$ で囲まれた部分の面積が x 軸と $y=nx$ $(n<0)$ によって三等分されるように $m,\ n$ の値を求めよ。



$y=mx$ と $y=x^2-x$ で

囲まれた部分の面積は

交点 $mx=x^2-x$

∴ $x(x-1-m)$ より $x=0,\ 1+m$

よって

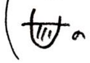
$\int_0^{1+m}\{mx-(x^2-x)\}dx$

$=-\int_0^{1+m}x(x-1-m)dx$

$=-\left(-\frac{1}{6}\right)(1+m-0)^3=\frac{1}{6}(1+m)^3$

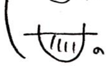
これを用いると x軸$(y=0)$と $y=x^2-x$ で囲まれた部分の面積は、$m=0$とすればよく、$\frac{1}{6}$ となり、$y=nx$ と $y=x^2-x$ で囲まれた部分の面積は $m\leftarrow n$ とすればよく、$\frac{1}{6}(1+n)^3$ となる。(6)

この時

$\frac{1}{6}(1+m)^3=\frac{3}{2}\times\frac{1}{6}$ ( は  の $\frac{3}{2}$倍)

より $1+m=\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ ∴ $m=\sqrt[3]{\frac{3}{2}}-1$

($m>0$を満たす)

また、$\frac{1}{6}(1+n)^3=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}$ ( は  の $\frac{1}{2}$倍)

より $1+n=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ ∴ $n=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-1$

($n<0$を満たす)

(10)