第４回定期考査（積分法）Ｈ２０．１２．１２

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1. 次の不定積分･定積分を計算せよ。

(1) $\int (a+1)^2 da + \int (a-1)^2 da$

(2) $\int_{x-1}^{x} \left(3t^2+3t+\dfrac{3}{2}\right)dt$　（答えは x について整理せよ。）

(3) $\int_{-2}^{2}(x-1)^3 dx + \int_{-2}^{2} 3x(x-1)dx$

(4) $\int_{-2}^{-1}(x^2-2x)dx - \int_{1}^{-1}(x^2-2x)dx + \int_{2}^{1}(2x-x^2)dx$

2. 次の曲線･直線によって囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $x=-y^2+2y$, $x=y^2-2y-6$

(2) $y=|2x^2+x-1|$, $x=0$, $x=-2$, x軸

(3) $y=(x-2)^3(x+1)$, x軸

3. 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。なお、(2)については定数 a の値も求めよ。

(1) $f(x)=x^2+\int_0^3 xf(t)dt$

(2) $3x^2+1=ax+\int_{-1}^{x} f(t)dt$

(3) $\dfrac{8}{3}x^3+6x^2+2x=\int_0^{2x} f(t)dt$

4. 曲線 $C : y=x^3$ 上の点 $\mathrm{P}(t, t^3)$ $(t>0)$ における接線を l とする。

(1) l の方程式を求めよ。

(2) l と C との接点 P 以外の交点を求めよ。

(3) C と l とで囲まれた部分の面積のうち，y 軸の右側の部分を S_1，左側の部分を S_2 とするとき，$S_1 : S_2$ を求めよ。

5. 放物線 $y=x^2-2x$ と $(3, 4)$ を通る直線で囲まれた部分の面積を S とする。このとき，面積 S を最小にするような直線の方程式を求めよ。また，その最小の面積を求めよ。

6. 直線 $y=mx$ $(m>0)$ と放物線 $y=x^2-x$ で囲まれた部分の面積が，x 軸と $y=nx$ $(n<0)$ によって 3 等分されるように，m, n の値を求めよ。

第4回定期考査　　平成20年12月12日　　2年＿＿組＿＿番氏名　こたえ

1 次の不定積分・定積分を計算せよ。 (5点×4)

(1) $\int (a+1)^2 da + \int (a-1)^2 da$

$= \int \{(a+1)^2 + (a-1)^2\} da$

$= \int (2a^2+2) da = \frac{2}{3}a^3 + 2a + C$

(2) $\int_{x-1}^{x} \left(3t^2+3t+\frac{3}{2}\right) dt$ (答えは x について整理せよ。)

$= \left[t^3 + \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}t\right]_{x-1}^{x}$

$= x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \left\{(x-1)^3 + \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{3}{2}(x-1)\right\}$

$= 3x^2 + 1$

(3) $\int_{-2}^{2} (x-1)^3 dx + \int_{-2}^{2} 3x(x-1) dx$

$= \int_{-2}^{2} \{(x-1)^3 + 3x(x-1)\} dx$

$= \int_{-2}^{2} (x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3x^2 - 3x) dx$

$= \int_{-2}^{2} (x^3 - 1) dx \quad = 2\int_0^2 (-1) dx$

$= 2\left[-x\right]_0^2 = -4$

(4) $\int_{-2}^{-1} (x^2-2x) dx - \int_{1}^{-1} (x^2-2x) dx + \int_{2}^{1} (2x-x^2) dx$

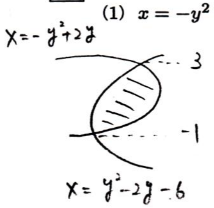
$= \int_{-2}^{-1} (x^2-2x) dx - \int_{1}^{-1} (x^2-2x) dx - \int_{2}^{1} (x^2-2x) dx \qquad = \frac{16}{3}$

$= \int_{-2}^{-1} (x^2-2x) dx - \int_{2}^{-1} (x^2-2x) dx$

$= \int_{-2}^{-1} (x^2-2x) dx + \int_{-1}^{2} (x^2-2x) dx = \int_{-2}^{2} (x^2-2x) dx = 2\int_0^2 x^2 dx$

2 次の曲線・直線によって囲まれた部分の面積Sを求めよ。

(1) $x = -y^2 + 2y$ と $x = y^2 - 2y - 6$



交点は $-y^2 + 2y = y^2 - 2y - 6$

$\therefore y^2 - 2y - 3 = 0$

$(y-3)(y+1) = 0$ より $y = -1, 3$

$\therefore$

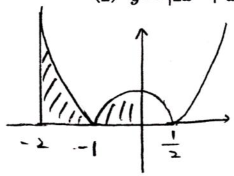
$S = \int_{-1}^{3} \{(-y^2+2y) - (y^2-2y-6)\} dy$

$= -2\int_{-1}^{3} (y^2 - 2y - 3) dy$

$= -2\int_{-1}^{3} (y-3)(y+1) dy$

$= -2\left(-\frac{1}{6}\right)\{3-(-1)\}^3 = \frac{64}{3}$ 　6

(2) $y = |2x^2 + x - 1|$ と $x = 0,\ x = -2,\ x$ 軸



$S = \int_{-2}^{-1} (2x^2+x-1) dx$

$+ \int_{-1}^{0} (-2x^2-x+1) dx$

$= \left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x\right]_{-2}^{-1}$

$+ \left[-\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-1}^{0}$

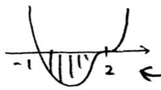
$= \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1\right) - \left(-\frac{16}{3} + 2 + 2\right)$

$+ 0 - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} - 1\right) = 3$ 　6

(3) $y = (x-2)^3(x+1)$ と x 軸

x軸と $x=-1, 2$ で交わる。

x^4 の係数は1, $x=2$ で3重解を持つ。



こんな形

$\therefore S = \int_{-1}^{2} \{0 - (x-2)^3(x+1)\} dx$

$= -\int_{-1}^{2} (x-2)^3(x-2+3) dx$

$= -\int_{-1}^{2} \{(x-2)^4 + 3(x-2)^3\} dx$

$= -\left[\frac{1}{5}(x-2)^5 + \frac{3}{4}(x-2)^4\right]_{-1}^{2}$

$= \frac{1}{5}(-3)^5 + \frac{3}{4}(-3)^4$

$= 3^5\left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right)$

$= \frac{243}{20}$ 　6

3 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。なお (2) については定数 a の値も求めること。

(1) $f(x) = x^2 + \int_0^3 x f(t) dt \quad = x^2 + x\int_0^3 f(t) dt$

$a = \int_0^3 f(t) dt$ とおくと. $f(x) = x^2 + ax$

$\therefore$

$a = \int_0^3 (t^2 + at) dt$

$= \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}at^2\right]_0^3$

$= \frac{1}{3}\cdot 3^3 + \frac{1}{2}a\cdot 3^2 = 9 + \frac{9}{2}a$

$\therefore a = 9 + \frac{9}{2}a$ より

$a = -\frac{18}{7}$

よって

$f(x) = x^2 - \frac{18}{7}x$ 　6

(2) $3x^2 + 1 = ax + \int_{-1}^{x} f(t) dt \cdots (*)$

両辺 x で微分して

$6x = a + f(x)$

よって

$f(x) = 6x - a$

また. $(*)$ の x に -1 を代入して

$3(-1)^2 + 1 = a(-1) + \int_{-1}^{-1} f(t) dt$

$= 6x + 4$

$\therefore 3 + 1 = -a$

より $a = -4$ 　6

(3) $\frac{8}{3}x^3 + 6x^2 + 2x = \int_0^{2x} f(t) dt$

x に $\frac{1}{2}x$ を代入して

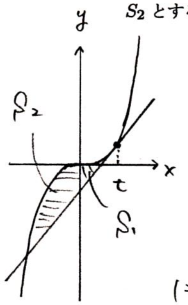
$\frac{8}{3}\left(\frac{1}{2}x\right)^3 + 6\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}x\right) = \int_0^x f(t) dt$

$\therefore \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x = \int_0^x f(t) dt$

両辺 x で微分して

$f(x) = x^2 + 3x + 1$ 　6

4 曲線 $C : y = x^3$ 上の点 P $(t,\ t^3)$ $(t > 0)$ における接線を l とする。
(1) l の方程式を求めよ。
(2) l と C との接点 P 以外の交点を求めよ。
(3) C と l とで囲まれた面積のうち y 軸の右側部分を S_1、左側部分を S_2 とするとき $S_1 : S_2$ を求めよ。



(1) $y' = 3x^2$ より

$y - t^3 = 3t^2(x - t)$

$\therefore\ y = 3t^2x - 2t^3$ ④

(2) $x^3 = 3t^2x - 2t^3$

を解く。ここで、この方程式は $x = t$ を解に持つので

$$\begin{array}{c|cccc} t & 1 & 0 & -3t^2 & 2t^3 \\ & & t & t^2 & -2t^3 \\ \hline & 1 & t & -2t^2 & 0 \end{array}$$

$x^3 - 3t^2x + 2t^3$

$= (x - t)(x^2 + tx - 2t^2)$

$= (x - t)(x - t)(x + 2t)$

$= (x - t)^2(x + 2t) = 0$

$\therefore\ x = t,\ -2t$ より P以外の交点は $(-2t,\ -8t^3)$ ④

(3) $S_1 = \int_0^t \{x^3 - (3t^2x - 2t^3)\}dx$

$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}t^2x^2 + 2t^3x\right]_0^t$

$= \frac{1}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^4 + 2t^4$

$= \frac{3}{4}t^4$

$S_2 = \int_{-2t}^0 \{x^3 - (3t^2x - 2t^3)\}dx$

$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}t^2x^2 + 2t^3x\right]_{-2t}^0$

$= -\left\{\frac{1}{4}(-2t)^4 - \frac{3}{2}t^2(-2t)^2 + 2t^3(-2t)\right\}$

$= -\frac{16}{4}t^4 + \frac{12}{2}t^4 + 4t^4$

$= 6t^4$

$\therefore$

$S_1 : S_2 = \frac{3}{4}t^4 : 6t^4$

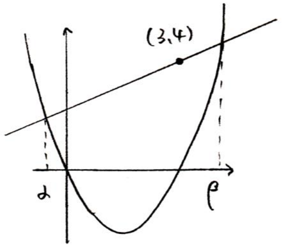
$= \frac{3}{4} : 6$

$= 3 : 24$

$= 1 : 8$

⑩

5 放物線 $y = x^2 - 2x$ と $(3,\ 4)$ を通る直線で囲まれた部分の面積を S とする。このとき面積 S を最小にするような直線の方程式を求めよ。また、その最小の面積を求めよ。



(3, 4) を通る直線は

傾きを m として

$y - 4 = m(x - 3)$

$\therefore\ y = mx - 3m + 4$

とおける。この時、放物線との交点は

$x^2 - 2x = mx - 3m + 4$

$\therefore$

$x^2 - (m+2)x + 3m - 4 = 0$

の2解であり、ここで

$D = (m+2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3m - 4)$

$= m^2 + 4m + 4 - 12m + 16$

$= m^2 - 8m + 20$

$= (m - 4)^2 + 4 > 0$

より、必ず異なる2つの解を持つ。

今、その2解を α, β $(\alpha < \beta)$ とすると

$\alpha = \frac{m + 2 - \sqrt{D}}{2}$, $\beta = \frac{m + 2 + \sqrt{D}}{2}$

であり そして

$S = \int_\alpha^\beta \{(mx - 3m + 4) - (x^2 - 2x)\}dx$

$= -\int_\alpha^\beta \{x^2 - (m+2)x + 3m - 4\}dx$

$= -\int_\alpha^\beta (x - \alpha)(x - \beta)dx$

$= -\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta - \alpha)^3$

$= \frac{1}{6}(\sqrt{D})^3$

$= \frac{1}{6}\left\{\sqrt{(m-4)^2 + 4}\right\}^3$

⑥

であるので、Sは

$m = 4$ の時

最小値 $\frac{1}{6}(\sqrt{4})^3$

をとる。

以上より

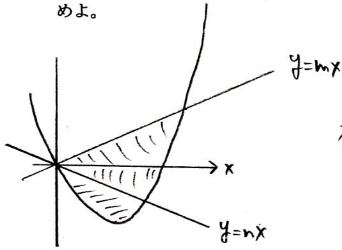
$y = 4x - 8$

の時、最小値

$\frac{4}{3}$

⑩

6 直線 $y = mx$ $(m > 0)$ と放物線 $y = x^2 - x$ で囲まれた部分の面積が x 軸と $y = nx$ $(n < 0)$ によって三等分されるように $m,\ n$ の値を求めよ。



$y = mx$ と $y = x^2 - x$ で

囲まれた部分の面積は

交点 $mx = x^2 - x$

$\therefore\ x(x - 1 - m)$ より $x = 0,\ 1 + m$

よって

$\int_0^{1+m} \{mx - (x^2 - x)\}dx$

$= -\int_0^{1+m} x(x - 1 - m)dx$

$= -\left(-\frac{1}{6}\right)(1 + m - 0)^3 = \frac{1}{6}(1+m)^3$

これを用いると x軸$(y = 0)$と $y = x^2 - x$ で

囲まれた部分の面積は、$m = 0$ とすればよく、$\frac{1}{6}$ となり、$y = nx$ と $y = x^2 - x$ で

囲まれた部分の面積は $m \leftarrow n$ とすればよく、$\frac{1}{6}(1+n)^3$ となる。

⑥

この時

$\frac{1}{6}(1+m)^3 = \frac{3}{2} \times \frac{1}{6}$ （は の $\frac{3}{2}$ 倍）

より $1 + m = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ $\therefore\ m = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} - 1$

($m > 0$ を満たす)

また、$\frac{1}{6}(1+n)^3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}$ （は の $\frac{1}{2}$ 倍）

より $1 + n = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ $\therefore\ n = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - 1$

($n < 0$ を満たす)

⑩