数学演習（面積）Ｈ２４．１０．６　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１. 次の曲線と 2 直線，および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1)　$y=3x^2+1$，$x=1$，$x=3$　　(2)　$y=-x^2-2$，$x=-1$，$x=2$

(3)　$y=x^2-4x+5$，$x=0$，$x=2$

２. 次の放物線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1)　$y=-x^2+3x$　　(2)　$y=x^2+2x-3$　　(3)　$y=-x^2+6x-8$

３. 次の曲線または直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1)　$y=x^2+x-4$，$y=3x-1$　　(2)　$y=x^2-4x+2$，$y=-x^2+2x-2$

(3)　$y=x^2+x+1$，$y=2x^2-3x+1$

４. 2 つの曲線 $y=2x^2$ $(0\leqq x\leqq 3)$，$y=-x^2+6x$ $(0\leqq x\leqq 3)$ と直線 $x=3$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和 S を求めよ。

５. 次の曲線や直線によって囲まれた部分の面積を求めよ。

(1)　$y=x^2+x$，$y=6$　　(2)　$y=x^2-3x+3$，$y=-x^2+2$

6. 放物線 $y=x^2-4x+3$ と，この放物線上の点 $(4,\ 3)$，$(0,\ 3)$ における接線で囲まれた部分の面積を求めよ。

7. 放物線 $y=ax-x^2$ $(a>0)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S が $\dfrac{9}{2}$ になるように，定数 a の値を定めよ。

8. 放物線 $y=-x^2+4x$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。
また，この囲まれた部分が直線 $y=mx$ によって上側と下側に $1:7$ の面積比で分けられるとき，定数 m の値を求めよ。

9. 曲線 $y=x^3$ を C とし，曲線 C 上の点 $(1,\ 1)$ における接線を ℓ とする。
(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ。
(2) 曲線 C と接線 ℓ の接点以外の交点の x 座標を求めよ。
(3) 曲線 C と接線 ℓ で囲まれた部分の面積を求めよ。

１． 次の曲線と２直線，および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1)　$y=3x^2+1$，$x=1$，$x=3$　　(2)　$y=-x^2-2$，$x=-1$，$x=2$

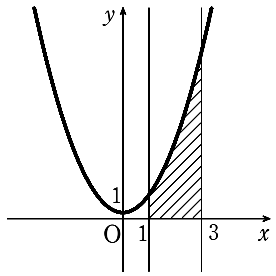
(3)　$y=x^2-4x+5$，$x=0$，$x=2$

解答　(1)　28　(2)　9　(3)　$\frac{14}{3}$

求める面積を S とする。

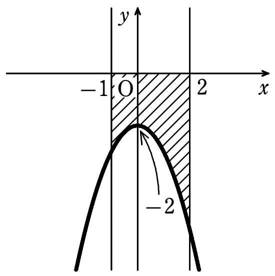
(1)　常に $y>0$ であるから

$$S=\int_1^3(3x^2+1)dx=\left[x^3+x\right]_1^3=(27+3)-(1+1)=28$$



(2)　常に $y<0$ であるから

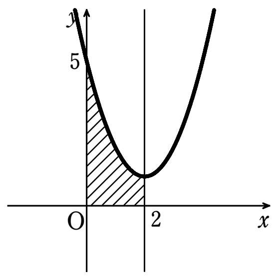
$$S=-\int_{-1}^2(-x^2-2)dx=\int_{-1}^2(x^2+2)dx=\left[\frac{x^3}{3}+2x\right]_{-1}^2=\left(\frac{8}{3}+4\right)-\left(-\frac{1}{3}-2\right)=9$$



(3)　$y=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$　より頂点$(2, 1)$

常に $y>0$ であるから

$$S=\int_0^2(x^2-4x+5)dx=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+5x\right]_0^2=\frac{8}{3}-8+10=\frac{14}{3}$$



２． 次の放物線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1)　$y=-x^2+3x$　　(2)　$y=x^2+2x-3$　　(3)　$y=-x^2+6x-8$

解答　(1)　$\frac{9}{2}$　(2)　$\frac{32}{3}$　(3)　$\frac{4}{3}$

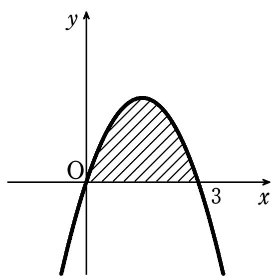
求める面積を S とする。

(1)　放物線と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$-x^2+3x=0$ を解いて　$x=0$，3

$0\leqq x\leqq 3$ では，$y\geqq 0$ であるから

$$S=\int_0^3(-x^2+3x)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=-9+\frac{27}{2}=\frac{9}{2}$$



別解　[積分の計算]$\left(-\frac{1}{6}\text{の公式}\right)$

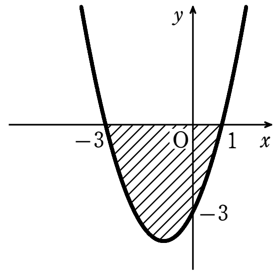
$$S=\int_0^3(-x^2+3x)dx=-\int_0^3x(x-3)dx=\frac{1}{6}(3-0)^3=\frac{9}{2}$$

(2)　放物線と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$x^2+2x-3=0$ を解いて　$x=-3$，1

$-3\leqq x\leqq 1$ では，$y\leqq 0$ であるから

$$S=-\int_{-3}^1(x^2+2x-3)dx=-\left[\frac{x^3}{3}+x^2-3x\right]_{-3}^1=-\left\{\left(\frac{1}{3}+1-3\right)-(-9+9+9)\right\}=\frac{32}{3}$$



別解　[積分の計算]　$\left(-\frac{1}{6}\text{の公式}\right)$

$$S=-\int_{-3}^1(x^2+2x-3)dx=-\int_{-3}^1(x+3)(x-1)dx=\frac{1}{6}\{1-(-3)\}^3=\frac{32}{3}$$

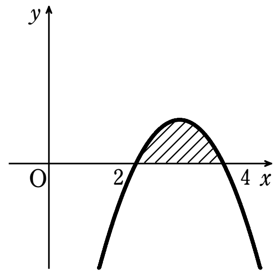
(3)　放物線と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$-x^2+6x-8=0$　すなわち　$x^2-6x+8=0$　を解いて

$x=2$，4

$2\leqq x\leqq 4$ では，$y\geqq 0$ であるから

$$S=\int_2^4(-x^2+6x-8)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+3x^2-8x\right]_2^4=\left(-\frac{64}{3}+48-32\right)-\left(-\frac{8}{3}+12-16\right)=\frac{4}{3}$$



別解　[積分の計算]　$\left(-\frac{1}{6}\text{の公式}\right)$

$$S=\int_2^4(-x^2+6x-8)dx=-\int_2^4(x-2)(x-4)dx=\frac{1}{6}(4-2)^3=\frac{4}{3}$$

３． 次の曲線または直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1)　$y=x^2+x-4$，$y=3x-1$　　(2)　$y=x^2-4x+2$，$y=-x^2+2x-2$

(3)　$y=x^2+x+1$，$y=2x^2-3x+1$

解答　(1)　$\frac{32}{3}$　(2)　$\frac{1}{3}$　(3)　$\frac{32}{3}$

注意　平方完成するなどして，実際に自分の手でグラフを書かないと，どっちが上側にあるか分からない。その訓練は各自で行うこと。

求める面積を S とする。

(1)　曲線と直線の交点の x 座標は，方程式

$x^2+x-4=3x-1$

すなわち　$x^2-2x-3=0$ を解いて

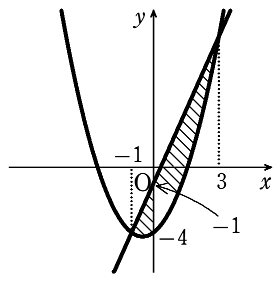
$x=-1$，3

$-1\leqq x\leqq 3$ では，$x^2+x-4\leqq 3x-1$

（つまり，直線の方が放物線より上側）

であるから

$$S=\int_{-1}^3\{(3x-1)-(x^2+x-4)\}dx=-\int_{-1}^3(x^2-2x-3)dx=-\left[\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right]_{-1}^3=-\left\{(9-9-9)-\left(-\frac{1}{3}-1+3\right)\right\}=\frac{32}{3}$$



別解　[積分の計算]　$\left(-\frac{1}{6}\text{の公式}\right)$

$$S=-\int_{-1}^3(x^2-2x-3)dx=-\int_{-1}^3(x+1)(x-3)dx=\frac{1}{6}\{3-(-1)\}^3=\frac{32}{3}$$

(2)　２曲線の交点の x 座標は，方程式

$x^2-4x+2=-x^2+2x-2$

すなわち　$2x^2-6x+4=0$ を解いて

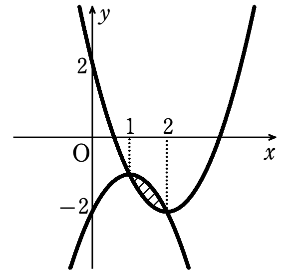
$x=1$，2

$1\leqq x\leqq 2$ では，$x^2-4x+2\leqq -x^2+2x-2$

（つまり，$y=-x^2+2x-2$ の方が $y=x^2-4x+2$ より上側）

であるから

$$S=\int_1^2\{(-x^2+2x-2)-(x^2-4x+2)\}dx=-2\int_1^2(x^2-3x+2)dx=-2\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_1^2=-2\left\{\left(\frac{8}{3}-6+4\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right)\right\}=\frac{1}{3}$$



別解　[積分の計算]　$\left(-\frac{1}{6}\text{の公式}\right)$

$$S=-2\int_1^2(x^2-3x+2)dx=-2\int_1^2(x-1)(x-2)dx=\frac{2}{6}(2-1)^3=\frac{1}{3}$$

注意　もし，$-\frac{1}{6}$の公式を使う場合，インテグラルの中で，x^2の係数が2や3になったら要注意！その場合はx^2の係数もインテグラルの外に出すこと。

(3)　２曲線の交点の x 座標は，方程式

$x^2+x+1=2x^2-3x+1$

すなわち　$x^2-4x=0$ を解いて

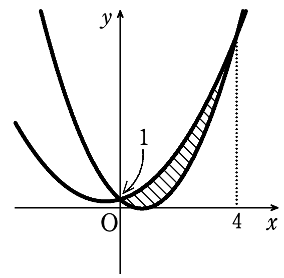
$x=0$，4

$0\leqq x\leqq 4$ では，$x^2+x+1\geqq 2x^2-3x+1$

（つまり，$y=x^2+x+1$ の方が $y=2x^2-3x+1$ より上側）

であるから

$$S=\int_0^4\{(x^2+x+1)-(2x^2-3x+1)\}dx=-\int_0^4(x^2-4x)dx=-\left[\frac{x^3}{3}-2x^2\right]_0^4=-\left(\frac{64}{3}-32\right)=\frac{32}{3}$$



別解　[積分の計算]　$\left(-\frac{1}{6}\text{の公式}\right)$

$$S=-\int_0^4(x^2-4x)dx=-\int_0^4x(x-4)dx=\frac{1}{6}(4-0)^3=\frac{32}{3}$$

４． ２つの曲線 $y=2x^2$ $(0\leqq x\leqq 3)$，$y=-x^2+6x$ $(0\leqq x\leqq 3)$ と直線 $x=3$ で囲まれた２つの部分の面積の和 S を求めよ。

解答　8

２つの曲線の交点の x 座標は，方程式

$2x^2=-x^2+6x$　すなわち　$3x^2-6x=0$

を解いて　$x=0$，2

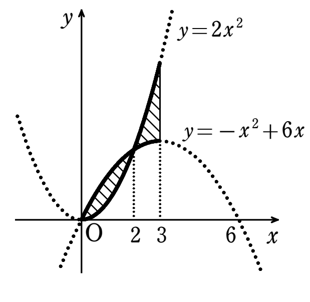
$0\leqq x\leqq 2$ では　$-x^2+6x\geqq 2x^2$

（つまり，$y=-x^2+6x$ の方が $y=2x^2$ より上側）

$2\leqq x\leqq 3$ では　$2x^2\geqq -x^2+6x$

（つまり，$y=2x^2$ の方が $y=-x^2+6x$ より上側）

よって，それぞれの部分の面積を公式によって求めて足すと



$$S=\int_0^2\{(-x^2+6x)-2x^2\}dx+\int_2^3\{2x^2-(-x^2+6x)\}dx$$
$$=\int_0^2(-3x^2+6x)dx+\int_2^3(3x^2-6x)dx$$
$$=\Big[-x^3+3x^2\Big]_0^2+\Big[x^3-3x^2\Big]_2^3=8$$

5．次の曲線や直線によって囲まれた部分の面積を求めよ。

(1)　$y=x^2+x$，$y=6$　　　(2)　$y=x^2-3x+3$，$y=-x^2+2$

解答　(1)　$\frac{125}{6}$　　(2)　$\frac{1}{24}$

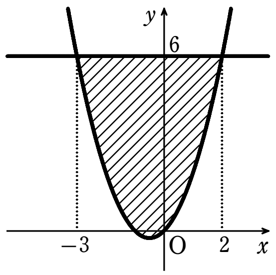
求める面積を S とする。

(1)　放物線と直線の交点の x 座標は，方程式

$x^2+x=6$ を解いて　　$x=-3,\ 2$

$-3\leqq x\leqq 2$ では，$x^2+x\leqq 6$ であるから

（つまり，$y=6$の方が$y=x^2+x$より上側）



$$S=\int_{-3}^{2}\{6-(x^2+x)\}dx=-\int_{-3}^{2}(x^2+x-6)dx$$
$$=-\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-6x\right]_{-3}^{2}$$
$$=-\left\{\left(\frac{8}{3}+2-12\right)-\left(-9+\frac{9}{2}+18\right)\right\}=\frac{125}{6}$$

別解　［積分の計算］（$-\frac{1}{6}$の公式）

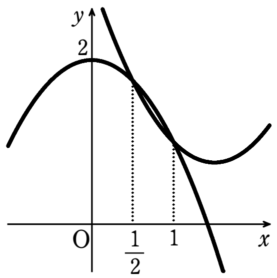
$$S=-\int_{-3}^{2}(x^2+x-6)dx=-\int_{-3}^{2}(x+3)(x-2)dx=\frac{1}{6}\{2-(-3)\}^3=\frac{125}{6}$$

(2)　2 曲線の交点の x 座標は，方程式

$x^2-3x+3=-x^2+2$

すなわち　$2x^2-3x+1=0$ を解いて

$x=\frac{1}{2},\ 1$



$\frac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ では，$x^2-3x+3\leqq -x^2+2$

（つまり，$y=-x^2+2$の方が

$y=x^2-3x+3$より上側）

であるから

$$S=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\{(-x^2+2)-(x^2-3x+3)\}dx$$
$$=-\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x^2-3x+1)dx=-\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+x\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$
$$=-\left\{\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{2}+1\right)-\left(\frac{1}{12}-\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\right)\right\}=\frac{1}{24}$$

別解　［積分の計算］（$-\frac{1}{6}$の公式）

$$S=-\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x^2-3x+1)dx=-2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)dx=\frac{2}{6}\left(1-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{24}$$

注意　もし，$-\frac{1}{6}$の公式を使う場合，インテグラルの中で，x^2の係数が2や3になったら要注意！その場合はx^2の係数もインテグラルの外に出すこと。

6．放物線 $y=x^2-4x+3$ と，この放物線上の点 $(4,\ 3)$，$(0,\ 3)$ における接線で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答　$\frac{16}{3}$

注意　接線の方程式の求め方は各自復習しておきなさい。

$y=x^2-4x+3$ について

$y'=2x-4$

点 $(4,\ 3)$ における接線の方程式は

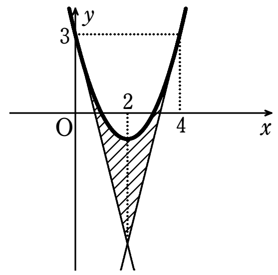
$y-3=4(x-4)$　　すなわち　　$y=4x-13$

点 $(0,\ 3)$ における接線の方程式は

$y-3=-4(x-0)$　すなわち　　$y=-4x+3$

この 2 つの接線の交点の x 座標は，方程式

$4x-13=-4x+3$ を解いて　　$x=2$



グラフから，求める面積は$0\leqq x\leqq 2$の部分と$2\leqq x\leqq 4$の部分に分けて，それぞれの部分の面積を公式によって求め，最後に足し合わせる。

$$\int_0^2\{(x^2-4x+3)-(-4x+3)\}dx+\int_2^4\{(x^2-4x+3)-(4x-13)\}dx$$

上側　下側　上側　下側

$$=\int_0^2 x^2dx+\int_2^4(x^2-8x+16)dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2+\left[\frac{x^3}{3}-4x^2+16x\right]_2^4$$
$$=\frac{8}{3}+\left(\frac{64}{3}-64+64\right)-\left(\frac{8}{3}-16+32\right)=\frac{16}{3}$$

7．放物線 $y=ax-x^2$ $(a>0)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S が $\frac{9}{2}$ になるように，定数 a の値を定めよ。

解答　$a=3$

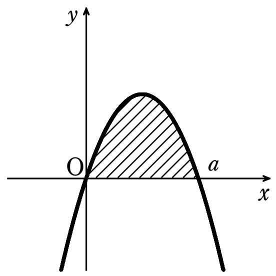
放物線と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$ax-x^2=0$　すなわち　$x(x-a)=0$

を解いて　　$x=0,\ a$

$a>0$ であるから，$x=a$は$x=0$よりも右側

$0\leqq x\leqq a$ では，$y\geqq 0$ であるから$-\frac{1}{6}$の公式から



$$S=\int_0^a(ax-x^2)dx=-\int_0^a x(x-a)dx=\frac{a^3}{6}$$

$S=\frac{9}{2}$ であるための条件は　　$\frac{a^3}{6}=\frac{9}{2}$

よって　　$a^3=27$

$a>0$ であるから　　$a=3$

8．放物線 $y=-x^2+4x$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。
また，この囲まれた部分が直線 $y=mx$ によって上側と下側に $1:7$ の面積比で分けられるとき，定数 m の値を求めよ。

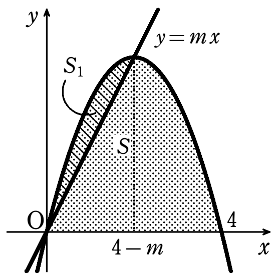
解答　$S=\frac{32}{3}$，$m=2$

放物線 $y=-x^2+4x$ と x 軸の交点の x 座標は，

方程式　$-x^2+4x=0$　すなわち　$x^2-4x=0$

を解いて　　$x=0,\ 4$

$0\leqq x\leqq 4$ では，$y\geqq 0$ であるから$-\frac{1}{6}$の公式より



$$S=\int_0^4(-x^2+4x)dx=-\int_0^4 x(x-4)dx$$
$$=\frac{1}{6}\cdot 4^3=\frac{32}{3}$$

放物線と直線 $y=mx$ で囲まれた部分の面積を S_1 とする。両者の共有点の x 座標は，

方程式　$-x^2+4x=mx$　すなわち　$x\{x-(4-m)\}=0$

を解いて　　$x=0,\ 4-m$

ここで$-\frac{1}{6}$の公式より

$$S_1=\int_0^{4-m}\{(-x^2+4x)-mx\}dx=-\int_0^{4-m}x\{x-(4-m)\}dx=\frac{(4-m)^3}{6}$$

S が直線 $y=mx$ によって上側と下側に $1:7$ の面積比で分けられるので，S_1 は全体の$\frac{1}{8}$

である。つまり$S_1:S=1:8$ であるから　　$8S_1=S$　すなわち　$8\cdot\frac{(4-m)^3}{6}=\frac{32}{3}$

ゆえに　　$(4-m)^3=8$　　　よって　$4-m$ を 3 乗して8になるので　$4-m=2$

したがって　　$m=2$

9．曲線 $y=x^3$ を C とし，曲線 C 上の点 $(1,\ 1)$ における接線を ℓ とする。

(1)　接線 ℓ の方程式を求めよ。

(2)　曲線 C と接線 ℓ の接点以外の交点の x 座標を求めよ。

(3)　曲線 C と接線 ℓ で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答　(1)　$y=3x-2$　　(2)　$x=-2$　　(3)　$\frac{27}{4}$

(1)　**注意**　接線の方程式の求め方は各自復習しておきなさい。

$y=x^3$ から　　$y'=3x^2$

よって，接線 ℓ の方程式は　　$y-1=3\cdot 1^2\cdot(x-1)$　すなわち　$y=3x-2$

(2)　曲線 C と接線 ℓ の共有点の x 座標は，方程式

$x^3=3x-2$　すなわち　$x^3-3x+2=0$ の解である。

$f(x)=x^3-3x+2$ とおくと　　xに1を代入したら計算結果は0になる

よって，$f(x)$ は $x-1$ で割り切れる。（公式より）

実際に割り算をすると

$$\begin{array}{r} x^2+x-2 \\ x-1\,\big)\,\overline{x^3\qquad -3x+2} \\ \underline{x^3-x^2\qquad\qquad} \\ x^2-3x\quad \\ \underline{x^2-x\quad\ } \\ -2x+2 \\ \underline{-2x+2} \\ 0 \end{array}$$

つまり，商がx^2+x-2，余りが0なので，（割られる数）＝（割る数）× 商 ＋ 余り

より　$x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2)+0$　つまり　$f(x)=(x-1)(x^2+x-2)$

さらに因数分解して

$f(x)=(x-1)(x^2+x-2)=(x-1)^2(x+2)$

ゆえに　　$(x-1)^2(x+2)=0$

したがって，$y=x^3$と接線$y=3x-2$は$x=1$と$x=-2$で交わるが，$x=1$のときは接点なので接点以外の交点の x 座標は　　$x=-2$

注意　この問題（２）は３次方程式$x^3-3x+2=0$の解き方を復習する問題です。

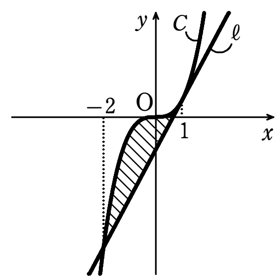
(3)　実際に$y=x^3$と$y=3x-2$のグラフを書くと

$-2\leqq x\leqq 1$ では，$3x-2\leqq x^3$

つまり，$y=x^3$のグラフの方が

$y=3x-2$よりも上側にあるから，

求める面積を S とすると



$$S=\int_{-2}^{1}\{x^3-(3x-2)\}dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)dx$$
$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}$$
$$=\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2\right)-(4-6-4)=\frac{27}{4}$$