数学演習（積分法）Ｈ２１．１０．６　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１. 曲線 $y=f(x)$ は点 A $(1,\ -1)$ を通り，その曲線上の点 P$(x,\ f(x))$ における接線の　傾きは $3x^2-4x$ で表される。この曲線の方程式を求めよ。

２. 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(4x^2-x+3)dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(2x^2+3x)dx-\int_{-1}^{2}x(2x+1)dx$

(3) $\displaystyle\int_{-3}^{3}(3x^2-4x)dx-\int_{4}^{3}x(3x-4)dx$

(4) $\displaystyle\int_{-3}^{3}(4x^3+6x^2-9x-10)dx$

３. 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。　$f(x)=2x^2+1+\displaystyle\int_0^1 xf(t)\,dt$

４. $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{2}{3}$ のとき，$f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

５. 次の曲線や直線で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1) $y=-x^2+3x\ (-1\leqq x\leqq 2)$，$x=-1$，$x=2$，$x$軸

(2) $y=-x^2+3x+2$，$y=x-1$

(3) $y=2x^2+3x+1$，$y=-x^2-2x+3$

6. 放物線 $y=x(3-x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を，直線 $y=ax$ が 2 等分するとき，a の値を求めよ。

7. 定積分 $\int_0^4 |x^2-4|dx$ を求めよ。

8. 放物線 $y=x^2-4x+3$ を C とする。C 上の点 $(0,\ 3)$，$(6,\ 15)$ における接線をそれぞれ，ℓ_1，ℓ_2 とするとき，次のものを求めよ。

(1)　ℓ_1，ℓ_2 の方程式

(2)　C，ℓ_1，ℓ_2 で囲まれる図形の面積

9. 曲線 C : $y=x^2$ と 点 $(2,\ 6)$ を通る傾きが m の直線 ℓ について

(1)　ℓ と C が異なる 2 つの共有点をもつことを示し，共有点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とおいて，$\beta-\alpha$ を m を用いて表せ。

(2)　ℓ と C で囲まれた図形の面積の最小値とそのときの m の値を求めよ。

数学演習（積分法）Ｈ２１．１０．６　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1．曲線 $y=f(x)$ は点 A$(1,\ -1)$ を通り，その曲線上の点 P$(x,\ f(x))$ における接線の　傾きは $3x^2-4x$ で表される。この曲線の方程式を求めよ。

解答　$y=x^3-2x^2$

接線の傾きが $3x^2-4x$ であるから　　$f'(x)=3x^2-4x$

よって　　$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-4x)dx$

$=x^3-2x^2+C$　（C は積分定数）

曲線 $y=f(x)$ は点 A$(1,\ -1)$ を通るから　　$f(1)=-1$

ゆえに　　$1-2+C=-1$　　　よって　　$C=0$

したがって　　$y=x^3-2x^2$

2．次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-1}^{2}(4x^2-x+3)dx$　　(2) $\int_{-1}^{2}(2x^2+3x)dx-\int_{-1}^{2}x(2x+1)dx$

(3) $\int_{-3}^{3}(3x^2-4x)dx-\int_{4}^{3}x(3x-4)dx$　　(4) $\int_{-3}^{3}(4x^3+6x^2-9x-10)dx$

解答　(1) $\frac{39}{2}$　(2) 3　(3) 77　(4) 48

(1) $\int_{-1}^{2}(4x^2-x+3)dx=4\int_{-1}^{2}x^2dx-\int_{-1}^{2}xdx+3\int_{-1}^{2}dx$

$=4\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2}+3\left[x\right]_{-1}^{2}$

$=4\left(\frac{8}{3}+\frac{1}{3}\right)-\left(2-\frac{1}{2}\right)+3(2+1)=\frac{39}{2}$

(2) $\int_{-1}^{2}(2x^2+3x)dx-\int_{-1}^{2}x(2x+1)dx=\int_{-1}^{2}\{(2x^2+3x)-(2x^2+x)\}dx$

$=\int_{-1}^{2}2xdx=\left[x^2\right]_{-1}^{2}=4-1=3$

(3) $\int_{-3}^{3}(3x^2-4x)dx-\int_{4}^{3}x(3x-4)dx=\int_{-3}^{3}(3x^2-4x)dx+\int_{3}^{4}(3x^2-4x)dx$

$=\int_{-3}^{4}(3x^2-4x)dx=\left[x^3-2x^2\right]_{-3}^{4}$

$=(64-32)-(-27-18)=77$

(4) $\int_{-3}^{3}(4x^3+6x^2-9x-10)dx=\int_{-3}^{3}(4x^3-9x)dx+\int_{-3}^{3}(6x^2-10)dx$

$=0+2\int_{0}^{3}(6x^2-10)dx=2\left[2x^3-10x\right]_{0}^{3}$

$=2(2\cdot3^3-10\cdot3-0)=48$

3．次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。　$f(x)=2x^2+1+\int_{0}^{1}xf(t)dt$

解答　$f(x)=2x^2+\frac{10}{3}x+1$

$\int_{0}^{1}f(t)dt=k$（定数）とおくと　　$f(x)=2x^2+kx+1$

よって　　$\int_{0}^{1}f(t)dt=\int_{0}^{1}(2t^2+kt+1)dt=\left[\frac{2}{3}t^3+\frac{k}{2}t^2+t\right]_{0}^{1}=\frac{2}{3}+\frac{k}{2}+1$

ゆえに　　$\frac{k}{2}+\frac{5}{3}=k$　　　よって　　$k=\frac{10}{3}$

したがって　　$f(x)=2x^2+\frac{10}{3}x+1$

4．$\int_{a}^{x}f(t)dt=\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{2}{3}$ のとき，$f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

解答　$f(x)=3x-2,\ a=\frac{2}{3}$

$\int_{a}^{x}f(t)dt=\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{2}{3}$　……① とする。

① の両辺を x で微分すると　　$f(x)=3x-2$

また，① において $x=a$ とおくと，左辺は 0 になるから

$0=\frac{3}{2}a^2-2a+\frac{2}{3}$

すなわち　　$9a^2-12a+4=0$

よって　　$(3a-2)^2=0$　　　したがって　　$a=\frac{2}{3}$

5．次の曲線や直線で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1) $y=-x^2+3x\ (-1\leqq x\leqq2)$，$x=-1$，$x=2$，$x$軸

(2) $y=-x^2+3x+2$，$y=x-1$

(3) $y=2x^2+3x+1$，$y=-x^2-2x+3$

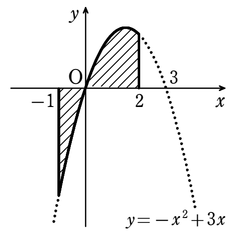
解答　(1) $\frac{31}{6}$　(2) $\frac{32}{3}$　(3) $\frac{343}{54}$

(1) 曲線 $y=-x^2+3x$ と x 軸の交点の x 座標は，$-x^2+3x=0$　すなわち　$x^2-3x=0$ の解である。

これを解いて　　$x(x-3)=0$

よって　　$x=0,\ 3$

区間 $-1\leqq x\leqq0$ において $y\leqq0$，区間 $0\leqq x\leqq2$ において $y\geqq0$ であるから，求める面積 S は



$S=-\int_{-1}^{0}(-x^2+3x)dx+\int_{0}^{2}(-x^2+3x)dx$

$=-\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{2}$

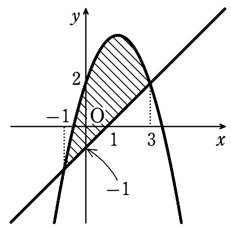
$=-\left\{-\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right)\right\}+\left(-\frac{8}{3}+6\right)=\frac{31}{6}$

(2) 放物線と直線の交点の x 座標は，$-x^2+3x+2=x-1$　すなわち　$x^2-2x-3=0$ の解である。

これを解いて　　$(x+1)(x-3)=0$

よって　　$x=-1,\ 3$

ゆえに，右の図から求める面積 S は



$S=\int_{-1}^{3}\{(-x^2+3x+2)-(x-1)\}dx$

$=\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)dx$

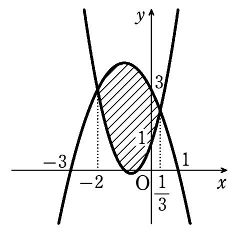
$=-\int_{-1}^{3}(x+1)(x-3)dx=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{3-(-1)\}^3=\frac{1}{6}\cdot4^3=\frac{32}{3}$

(3) 放物線 $y=2x^2+3x+1$ と $y=-x^2-2x+3$ の交点の x 座標は，$2x^2+3x+1=-x^2-2x+3$ すなわち $3x^2+5x-2=0$ の解である。

よって　　$(3x-1)(x+2)=0$

ゆえに　　$x=\frac{1}{3},\ -2$

右の図から，求める面積 S は



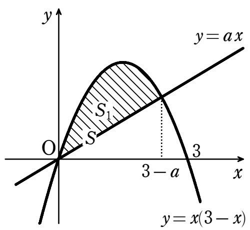
$S=\int_{-2}^{\frac{1}{3}}\{(-x^2-2x+3)-(2x^2+3x+1)\}dx$

$=-\int_{-2}^{\frac{1}{3}}(3x^2+5x-2)dx=-\int_{-2}^{\frac{1}{3}}(3x-1)(x+2)dx$

$=-3\int_{-2}^{\frac{1}{3}}(x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right)dx=-3\left(-\frac{1}{6}\right)\left\{\frac{1}{3}-(-2)\right\}^3=\frac{343}{54}$

6. 放物線 $y=x(3-x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を，直線 $y=ax$ が 2 等分するとき，a の値を求めよ。

解答　$3-\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$



放物線 $y=x(3-x)$ ……① と直線 $y=ax$ ……②
の交点の x 座標は，$x(3-x)=ax$ の解である。
これを解いて　$x\{x-(3-a)\}=0$
よって　$x=0,\ 3-a$
図から　$a>0$ かつ $3-a>0$
すなわち　$0<a<3$
放物線 ① と直線 ② で囲まれた図形の面積を S_1 とすると

$$S_1=\int_0^{3-a}\{x(3-x)-ax\}dx=-\int_0^{3-a}x\{x-(3-a)\}dx$$

$$=\frac{1}{6}\{(3-a)-0\}^3=\frac{(3-a)^3}{6}$$

放物線 ① と x 軸で囲まれた図形の面積を S とすると

$$S=\int_0^3 x(3-x)dx=-\int_0^3 x(x-3)dx$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)(3-0)^3$$

$$=\frac{9}{2}$$

条件より，$S=2S_1$ であるから　$\dfrac{9}{2}=2\cdot\dfrac{(3-a)^3}{6}$

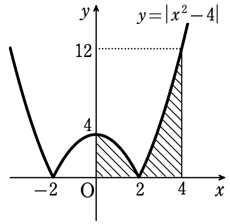
ゆえに　$(3-a)^3=\dfrac{27}{2}$

よって，$3-a=\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$ から　$a=3-\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$

これは $0<a<3$ を満たす。

7. 定積分 $\displaystyle\int_0^4|x^2-4|dx$ を求めよ。

解答　16



$0\leqq x\leqq 2$ のとき　$|x^2-4|=-(x^2-4)$
$2\leqq x\leqq 4$ のとき　$|x^2-4|=x^2-4$
よって

$$\int_0^4|x^2-4|dx=\int_0^2|x^2-4|dx+\int_2^4|x^2-4|dx$$

$$=\int_0^2\{-(x^2-4)\}dx+\int_2^4(x^2-4)dx$$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_0^2+\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_2^4$$

$$=-2\left(\frac{8}{3}-8\right)+\left(\frac{64}{3}-16\right)$$

$$=16$$

8. 放物線 $y=x^2-4x+3$ を C とする。C 上の点 $(0,\ 3)$，$(6,\ 15)$ における接線をそれぞれ，ℓ_1，ℓ_2 とするとき，次のものを求めよ。
(1)　ℓ_1，ℓ_2 の方程式　　　(2)　C，ℓ_1，ℓ_2 で囲まれる図形の面積

解答　(1)　$\ell_1:y=-4x+3$，$\ell_2:y=8x-33$　　(2)　18

(1)　$y'=2x-4$ から，
ℓ_1 の方程式は　$y-3=(2\cdot 0-4)(x-0)$　すなわち　$y=-4x+3$
ℓ_2 の方程式は　$y-15=(2\cdot 6-4)(x-6)$　すなわち　$y=8x-33$
(2)　ℓ_1，ℓ_2 の交点の x 座標を求めると
$-4x+3=8x-33$ から　$12x=36$　　ゆえに　$x=3$
よって，求める面積 S は

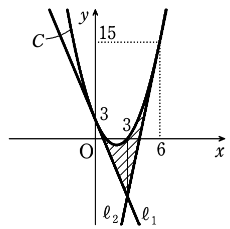
$$S=\int_0^3\{(x^2-4x+3)-(-4x+3)\}dx$$

$$+\int_3^6\{(x^2-4x+3)-(8x-33)\}dx$$

$$=\int_0^3 x^2dx+\int_3^6(x-6)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3+\left[\frac{1}{3}(x-6)^3\right]_3^6$$

$$=9+9=18$$



9. 曲線 $C:y=x^2$ と点 $(2,\ 6)$ を通る傾きが m の直線 ℓ について
(1)　ℓ と C が異なる 2 つの共有点をもつことを示し，共有点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とおいて，$\beta-\alpha$ を m を用いて表せ。
(2)　ℓ と C で囲まれた図形の面積の最小値とそのときの m の値を求めよ。

解答　(1)　証明略，$\beta-\alpha=\sqrt{m^2-8m+24}$　　(2)　$m=4$ で最小値 $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

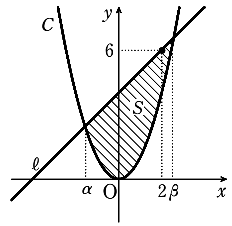
(1)　直線 ℓ の方程式は　$y=m(x-2)+6$
$x^2=m(x-2)+6$　すなわち　$x^2-mx+2(m-3)=0$　……①
の判別式を D とすると

$$D=m^2-4\cdot 2(m-3)=(m-4)^2+8>0$$

よって，ℓ と C は異なる 2 つの共有点をもつ。
α，β（$\alpha<\beta$）は，2 次方程式 ① の解であるから

$$\beta-\alpha=\frac{m+\sqrt{D}}{2}-\frac{m-\sqrt{D}}{2}=\sqrt{D}=\sqrt{m^2-8m+24}$$

(2)　題意の面積を S とすると



$$S=\int_\alpha^\beta\{m(x-2)+6-x^2\}dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta\{x^2-mx+2(m-3)\}dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(1) から　$S=\dfrac{1}{6}\left(\sqrt{m^2-8m+24}\right)^3=\dfrac{1}{6}\{(m-4)^2+8\}^{\frac{3}{2}}$

$(m-4)^2+8$ は $m=4$ で最小値 8 をとるから，題意の面積 S は，$m=4$ で最小値 $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$ をとる。