数学演習（積分法）Ｈ２２．１１．１８　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１．次の不定積分を求めよ。

(1) $\int dx$　(2) $\int 2x dx$　(3) $\int x^2 dx$

２．次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (x^2-6x+4)dx$　(2) $\int (2t+1)(t-3)dt$

(3) $\int (x+2)^3 dx - \int (x-2)^3 dx$

３．不定積分 $\int (x-1)^2(x+1)dx$ を求めよ。

４．(1) $f'(x)=(2x-4)(1-3x)$ で $f(1)=0$ となる関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ は点 A$(1,\ -1)$ を通り，その曲線上の点 P$(x,\ f(x))$ における接線の傾きは $3x^2-4x$ で表される。この曲線の方程式を求めよ。

５．次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-1}^{2}(4x^2-x+3)dx$　(2) $\int_{-1}^{2}(2x^2+3x)dx-\int_{-1}^{2}x(2x+1)dx$

(3) $\int_{-3}^{3}(3x^2-4x)dx-\int_{4}^{3}x(3x-4)dx$

６．定積分 $\int_{-2}^{2}(x-1)(2x^2-3x+1)dx$ を求めよ。

7．次の曲線，直線と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1)　$y=x^2-x-2$

(2)　$y=-x^2+3x$ $(-1\leqq x\leqq 2)$，$x=-1$，$x=2$

8．次の曲線や直線で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1)　$y=-x^2+3x+2$，$y=x-1$　　(2)　$y=x^2+1$，$y=-x^2+x+2$

9．関数 $y=2x^3-x^2-2x+1$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

10．次の定積分を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int_0^3 |x^2-2x|\,dx$　　(2)　$\displaystyle\int_0^3 x|x-1|\,dx$

11．$y=f(x)$ は次の性質 (A)，(B)，(C) を満たすものとする。

(A)　$y=f(x)$ のグラフは $y=x^2$ のグラフを平行移動したものである。

(B)　$f(1)=0$

(C)　曲線 $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積は $\dfrac{1}{6}$ である。

このとき，$f(x)$ を求めよ。

数学演習（積分法）Ｈ２２．１１．１８　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　）

1．次の不定積分を求めよ。

(1) $\int dx$　　(2) $\int 2x dx$　　(3) $\int x^2 dx$

解答　C は積分定数とする。

(1) $x+C$　(2) x^2+C　(3) $\dfrac{x^3}{3}+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $(x)'=1$ であるから　$\int dx=\int 1dx=x+C$

(2) $(x^2)'=2x$ であるから　$\int 2xdx=x^2+C$

(3) $\int x^2dx=\dfrac{1}{2+1}x^{2+1}+C=\dfrac{x^3}{3}+C$

2．次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (x^2-6x+4)dx$　　(2) $\int (2t+1)(t-3)dt$

(3) $\int (x+2)^3dx-\int (x-2)^3dx$

解答　(1) $\dfrac{x^3}{3}-3x^2+4x+C$（C は積分定数）

(2) $\dfrac{2}{3}t^3-\dfrac{5}{2}t^2-3t+C$（$C$ は積分定数）　(3) $4x^3+16x+C$（C は積分定数）

解説

(1) $\int (x^2-6x+4)dx=\int x^2dx-6\int xdx+4\int dx$

$=\dfrac{x^3}{3}-3x^2+4x+C$（$C$ は積分定数）

(2) $\int (2t+1)(t-3)dt=\int (2t^2-5t-3)dt=\dfrac{2}{3}t^3-\dfrac{5}{2}t^2-3t+C$（$C$ は積分定数）

(3) $\int (x+2)^3dx-\int (x-2)^3dx=\int \{(x+2)^3-(x-2)^3\}dx=\int (12x^2+16)dx$

$=4x^3+16x+C$（C は積分定数）

3．不定積分 $\int (x-1)^2(x+1)dx$ を求めよ。

解答　$\dfrac{1}{12}(x-1)^3(3x+5)+C$（$C$ は積分定数）

解説

ヒント　$(x-1)^2$の塊を壊さないように，逆に$x+1$を$(x-1)+2$と変形する

$\int (x-1)^2(x+1)dx=\int (x-1)^2\{(x-1)+2\}dx$

$=\int \{(x-1)^3+2(x-1)^2\}dx$

$=\int (x-1)^3dx+2\int (x-1)^2dx$

$=\dfrac{1}{4}(x-1)^4+\dfrac{2}{3}(x-1)^3+C$

$=\dfrac{3}{12}(x-1)^4+\dfrac{8}{12}(x-1)^3+C$

$=\dfrac{1}{12}(x-1)^3\{3(x-1)+8\}+C$

$=\dfrac{1}{12}(x-1)^3(3x+5)+C$（$C$ は積分定数）

4．(1) $f'(x)=(2x-4)(1-3x)$ で $f(1)=0$ となる関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ は点 A$(1,\ -1)$ を通り，その曲線上の点 P$(x,\ f(x))$ における接線の傾きは $3x^2-4x$ で表される。この曲線の方程式を求めよ。

解答　(1) $f(x)=-2x^3+7x^2-4x-1$　(2) $y=x^3-2x^2$

解説

(1) $f(x)=\int f'(x)dx=\int (2x-4)(1-3x)dx$

$=\int (-6x^2+14x-4)dx$

$=-2x^3+7x^2-4x+C$（C は積分定数）

$f(1)=0$ から　$-2+7-4+C=0$

よって　$C=-1$

したがって　$f(x)=-2x^3+7x^2-4x-1$

(2) x座標がaである点における接線の傾きは$f'(a)$であった。

今，点$(x,f(x))$における接線の傾きが $3x^2-4x$ であるから

$f'(x)=3x^2-4x$

よって　$f(x)=\int f'(x)dx=\int (3x^2-4x)dx$

$=x^3-2x^2+C$（C は積分定数）

曲線 $y=f(x)$ は点 A$(1,\ -1)$ を通るから　$f(1)=-1$

ゆえに　$1-2+C=-1$　　よって　$C=0$

したがって　$y=x^3-2x^2$

5．次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-1}^{2}(4x^2-x+3)dx$　　(2) $\int_{-1}^{2}(2x^2+3x)dx-\int_{-1}^{2}x(2x+1)dx$

(3) $\int_{-3}^{3}(3x^2-4x)dx-\int_{4}^{3}x(3x-4)dx$

解答　(1) $\dfrac{39}{2}$　(2) 3　(3) 77

解説

(1) $\int_{-1}^{2}(4x^2-x+3)dx=4\int_{-1}^{2}x^2dx-\int_{-1}^{2}xdx+3\int_{-1}^{2}dx$

$=4\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}-\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2}+3\Big[x\Big]_{-1}^{2}$

$=4\left(\dfrac{8}{3}+\dfrac{1}{3}\right)-\left(2-\dfrac{1}{2}\right)+3(2+1)=\dfrac{39}{2}$

(2) ヒント　積分区間が同じものはまとめられる

$\int_{-1}^{2}(2x^2+3x)dx-\int_{-1}^{2}x(2x+1)dx=\int_{-1}^{2}\{(2x^2+3x)-(2x^2+x)\}dx$

$=\int_{-1}^{2}2xdx=\Big[x^2\Big]_{-1}^{2}=4-1=3$

(3) ヒント　中身が同じで積分区間が$a\to b\to c$となっているものは、まとめられる

$\int_{-3}^{3}(3x^2-4x)dx-\int_{4}^{3}x(3x-4)dx=\int_{-3}^{3}(3x^2-4x)dx+\int_{3}^{4}(3x^2-4x)dx$

$=\int_{-3}^{4}(3x^2-4x)dx=\Big[x^3-2x^2\Big]_{-3}^{4}$

$=(64-32)-(-27-18)=77$

6．定積分 $\int_{-2}^{2}(x-1)(2x^2-3x+1)dx$ を求めよ。

解答　$-\dfrac{92}{3}$

解説

ヒント　積分区間が$-a$からaまでなので，指数が奇数のものは０になる。

$\int_{-2}^{2}(x-1)(2x^2-3x+1)dx=\int_{-2}^{2}(2x^3-5x^2+4x-1)dx$

$=\int_{-2}^{2}(2x^3+4x)dx+\int_{-2}^{2}(-5x^2-1)dx$

$=0+2\int_{0}^{2}(-5x^2-1)dx$

$=-2\left[\dfrac{5}{3}x^3+x\right]_{0}^{2}$

$=-2\left(\dfrac{40}{3}+2\right)=-\dfrac{92}{3}$

7．次の曲線，直線と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1) $y=x^2-x-2$

(2) $y=-x^2+3x$（$-1\leqq x\leqq 2$），$x=-1$，$x=2$

解答　(1) $\dfrac{9}{2}$　(2) $\dfrac{31}{6}$

解説

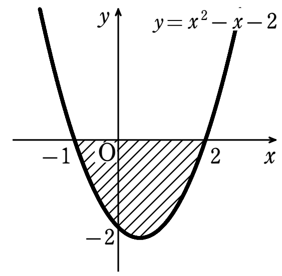
(1) 曲線 $y=x^2-x-2$ とx 軸の交点の x 座標は，

$x^2-x-2=0$ の解である。

これを解いて　$(x+1)(x-2)=0$

よって　$x=-1,\ 2$

$-1\leqq x\leqq 2$ において $y\leqq 0$ であるから，求める面積 S は



$S=-\int_{-1}^{2}(x^2-x-2)dx=-\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)dx$

$=-\left(-\dfrac{1}{6}\right)\{2-(-1)\}^3=\dfrac{9}{2}$

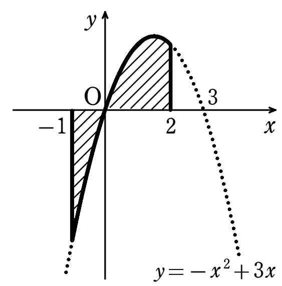
(2) 曲線 $y=-x^2+3x$ と x 軸の交点の x 座標は，

$-x^2+3x=0$　すなわち　$x^2-3x=0$ の解である。

これを解いて　$x(x-3)=0$

よって　$x=0,\ 3$

$-1\leqq x\leqq 0$ において　x軸よりも下，$0\leqq x\leqq 2$ において x軸よりも上であるから，求める面積 S は



$S=-\int_{-1}^{0}(-x^2+3x)dx+\int_{0}^{2}(-x^2+3x)dx$

$=-\left[-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3}{2}x^2\right]_{0}^{2}$

$=-\left\{-\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{2}\right)\right\}+\left(-\dfrac{8}{3}+6\right)=\dfrac{31}{6}$

8．次の曲線や直線で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1) $y=-x^2+3x+2$，$y=x-1$　　(2) $y=x^2+1$，$y=-x^2+x+2$

解答　(1) $\dfrac{32}{3}$　(2) $\dfrac{9}{8}$

解説

(1)　放物線と直線の交点の x 座標は，

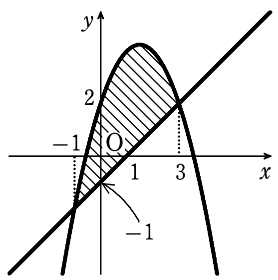
$-x^2+3x+2=x-1$ すなわち $x^2-2x-3=0$

の解である。

これを解いて　　$(x+1)(x-3)=0$

よって　　　　　$x=-1,\ 3$

ゆえに，右の図から求める面積 S は



$$S=\int_{-1}^{3}\{(-x^2+3x+2)-(x-1)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)dx$$

$$=-\int_{-1}^{3}(x+1)(x-3)dx=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{3-(-1)\}^3=\frac{1}{6}\cdot4^3=\frac{32}{3}$$

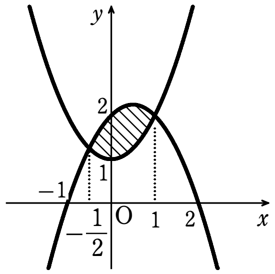
(2)　2 曲線の交点の x 座標は，$x^2+1=-x^2+x+2$

すなわち $2x^2-x-1=0$ の解である。

これを解いて　　$(2x+1)(x-1)=0$

よって　　　　　$x=-\frac{1}{2},\ 1$

ゆえに，右の図から求める面積 S は



$$S=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\{(-x^2+x+2)-(x^2+1)\}dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(-2x^2+x+1)dx$$

$$=-\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(2x+1)(x-1)dx$$

$$=-2\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)dx$$

$$=-2\left(-\frac{1}{6}\right)\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}^3=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{9}{8}$$

9．関数 $y=2x^3-x^2-2x+1$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

解答　$\frac{71}{48}$

解説

曲線 $y=2x^3-x^2-2x+1$ と x 軸の交点の x 座標は，$2x^3-x^2-2x+1=0$ の解である。

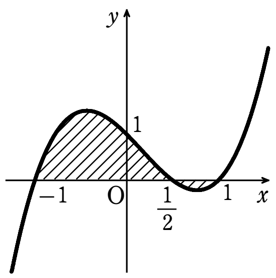
$f(x)=2x^3-x^2-2x+1$ とすると　　$f(1)=2-1-2+1=0$

よって　　$f(x)=(x-1)(2x^2+x-1)$

$=(x-1)(x+1)(2x-1)$

$f(x)=0$ を解いて　　$x=1,\ -1,\ \frac{1}{2}$

また，曲線は右の図のようになり



$-1\leqq x\leqq\frac{1}{2}$ において　x軸より上，

$\frac{1}{2}\leqq x\leqq1$ において　　x軸より下

ゆえに，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(2x^3-x^2-2x+1)dx-\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x^3-x^2-2x+1)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{2}-\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}-\left[\frac{x^4}{2}-\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=2\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right\}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{71}{48}$$

10．次の定積分を求めよ。

(1)　$\int_0^3|x^2-2x|dx$　　　　(2)　$\int_0^3 x|x-1|dx$

解答　(1)　$\frac{8}{3}$　　(2)　$\frac{29}{6}$

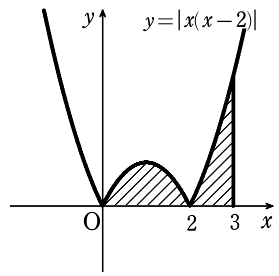
解説

(1)　$x^2-2x=x(x-2)$ であるから

$0\leqq x\leqq2$ のとき　　$|x^2-2x|=-(x^2-2x)$

$2\leqq x\leqq3$ のとき　　$|x^2-2x|=x^2-2x$

よって



$$\int_0^3|x^2-2x|dx=\int_0^2\{-(x^2-2x)\}dx+\int_2^3(x^2-2x)dx$$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_0^2+\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_2^3$$

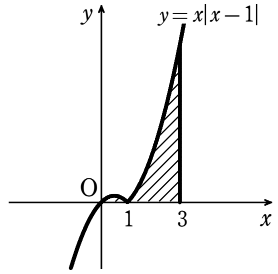
$$=-2\left(\frac{2^3}{3}-2^2\right)+\left(\frac{3^3}{3}-3^2\right)$$

$$=-2\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{8}{3}$$

(2)　$0\leqq x\leqq1$ のとき　　$|x-1|=-(x-1)$

$1\leqq x\leqq3$ のとき　　$|x-1|=x-1$

よって



$$\int_0^3 x|x-1|dx=\int_0^1\{-x(x-1)\}dx+\int_1^3 x(x-1)dx$$

$$=-\int_0^1 x(x-1)dx+\int_1^3(x^2-x)dx$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)(1-0)^3+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_1^3$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{3^3-1^3}{3}-\frac{3^2-1^2}{2}=\frac{29}{6}$$

11．$y=f(x)$ は次の性質 (A)，(B)，(C) を満たすものとする。

(A)　$y=f(x)$ のグラフは $y=x^2$ のグラフを平行移動したものである。

(B)　$f(1)=0$

(C)　曲線 $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積は $\frac{1}{6}$ である。

このとき，$f(x)$ を求めよ。

解答　$f(x)=x^2-3x+2$ または $f(x)=x^2-x$

解説

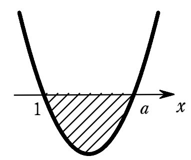
(A) から $y=x^2$ のグラフを平行移動したものなので，$y=f(x)$のグラフはx^2の係数は 1 である放物線である。また(B) から，$y=f(x)$のグラフは点$(1,0)$を通るので，もう 1 つのx軸との交点を$(a,0)$とすると

$f(x)=(x-1)(x-a)$

とおくことができる。ここで(C) から，x軸と$y=f(x)$で囲まれた部分の面積が存在するので，$y=f(x)$はx軸と異なる 2 点で交わっている。つまり，$a\neqq1$

ここで，aが 1 より大きいか小さいかで場合分けをする。

[1]　$a>1$ のとき　(C) から



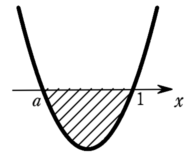
$$-\int_1^a(x-1)(x-a)dx=-\left(-\frac{1}{6}\right)(a-1)^3=\frac{1}{6}$$

よって　$(a-1)^3=1$　ゆえに　$a=2$

これは条件を満たす。

このとき　$f(x)=(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$

[2]　$a<1$ のとき　(C) から



$$-\int_a^1(x-1)(x-a)dx=-\left(-\frac{1}{6}\right)(1-a)^3=\frac{1}{6}$$

よって　$(1-a)^3=1$　ゆえに　$a=0$

これは条件を満たす。

このとき　$f(x)=(x-1)x=x^2-x$

[1]，[2] から　$f(x)=x^2-3x+2$ または $f(x)=x^2-x$