数学演習（積分法）Ｈ２１．９．１７　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１. 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int(3x^2-4x+5)dx$　　(2) $\int(3x+1)(3x-1)dx$

２. 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_1^1(15x^2-4x)dx$　　(2) $\int_{-1}^2(x+1)^2dx+\int_2^{-1}(x^2-4x+1)dx$

(3) $\int_0^2(x^2-2x)dx-\int_3^2(x^2-2x)dx$

３. 等式 $\int_a^x f(t)\,dt=x^2+2x-3$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

４. 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x)=2x^2+1+\int_0^1 xf(t)\,dt$$

５. 放物線 $y=x^2-3x$ と x 軸および２直線 $x=1$，$x=4$ で囲まれた２つの部分の面積を求めよ。

６. 放物線 $y=x^2-x-4$ と直線 $y=x-1$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

7．定積分 $\int_1^3 |x^2-4|\,dx$ を求めよ。

8．放物線 $y=x^2$ 上の 2 点 $(-1,\ 1)$，$(2,\ 4)$ における 2 つの接線とこの放物線で囲まれた部分の面積を求めよ。

9．直線 $y=kx$ が，放物線 $y=2x-x^2$ と x 軸で囲まれた図形の面積を 2 等分するように，定数 k の値を定めよ。

数学演習（積分法）Ｈ２１．９．１７

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

１．次の不定積分を求めよ。

(1) $\int(3x^2-4x+5)dx$　　(2) $\int(3x+1)(3x-1)dx$

解答　C は積分定数とする

(1) x^3-2x^2+5x+C　(2) $3x^3-x+C$

C は積分定数とする。

(1) $\int(3x^2-4x+5)dx=3\int x^2dx-4\int xdx+5\int dx$

$$=3\cdot\frac{x^3}{3}-4\cdot\frac{x^2}{2}+5\cdot x+C$$

$$=x^3-2x^2+5x+C$$

(2) $\int(3x+1)(3x-1)dx=\int(9x^2-1)dx=9\int x^2dx-\int dx$

$$=9\cdot\frac{x^3}{3}-x+C=3x^3-x+C$$

２．次の定積分を求めよ。

(1) $\int_1^1(15x^2-4x)dx$　　(2) $\int_{-1}^2(x+1)^2dx+\int_2^{-1}(x^2-4x+1)dx$

(3) $\int_0^2(x^2-2x)dx-\int_3^2(x^2-2x)dx$

解答　(1) 0　(2) 9　(3) 0

(1) 上端と下端が同じであるから　$\int_1^1(15x^2-4x)dx=0$

(2) $(与式)=\int_{-1}^2(x+1)^2dx-\int_{-1}^2(x^2-4x+1)dx$

$$=\int_{-1}^2\{(x+1)^2-(x^2-4x+1)\}dx=\int_{-1}^2 6xdx=\Big[3x^2\Big]_{-1}^2$$

$$=3\{2^2-(-1)^2\}=9$$

(3) $(与式)=\int_0^2(x^2-2x)dx+\int_2^3(x^2-2x)dx$

$$=\int_0^3(x^2-2x)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_0^3=\frac{3^3}{3}-3^2=0$$

３．等式 $\int_a^x f(t)\,dt=x^2+2x-3$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

解答　$f(x)=2x+2$；$a=1,\ -3$

等式の両辺の関数を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=(x^2+2x-3)'$$

よって　$f(x)=2x+2$

また，与えられた等式で $x=a$ とおくと

(左辺)$=\int_a^a f(t)dt=0$ であるから　$0=a^2+2a-3$

よって　$(a-1)(a+3)=0$

したがって　$a=1,\ -3$

４．次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x)=2x^2+1+\int_0^1 xf(t)\,dt$$

解答　$f(x)=2x^2+\frac{10}{3}x+1$

x は積分変数 t に無関係であるから　$\int_0^1 xf(t)\,dt=x\int_0^1 f(t)\,dt$

$\int_0^1 f(t)\,dt$ は定数であるから，$\int_0^1 f(t)\,dt=k$ とおくと

$$f(x)=2x^2+1+xk$$

よって　$k=\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1(2t^2+kt+1)dt=\left[\frac{2}{3}t^3+\frac{k}{2}t^2+t\right]_0^1$

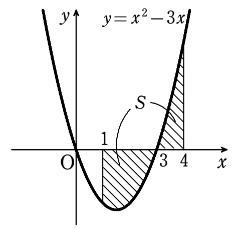
$$=\frac{2}{3}+\frac{k}{2}+1$$

すなわち　$k=\frac{k}{2}+\frac{5}{3}$　　これを解いて　$k=\frac{10}{3}$

したがって　$f(x)=2x^2+\frac{10}{3}x+1$

５．放物線 $y=x^2-3x$ と x 軸および2直線 $x=1$，$x=4$ で囲まれた2つの部分の面積を求めよ。

解答　$\frac{31}{6}$



放物線と x 軸の交点の x 座標は，方程式 $x^2-3x=0$

を解いて　$x=0,\ 3$

$1\leqq x\leqq 3$ では　$y\leqq 0$

$3\leqq x\leqq 4$ では　$y\geqq 0$

であるから，求める面積 S は

$$S=-\int_1^3(x^2-3x)dx+\int_3^4(x^2-3x)dx$$

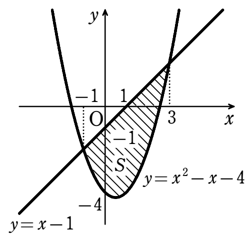
$$=-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2\right]_1^3+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2\right]_3^4$$

$$=-\left\{\left(9-\frac{27}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}\right)\right\}+\left(\frac{64}{3}-24\right)-\left(9-\frac{27}{2}\right)$$

$$=-42+\frac{1+64}{3}+\frac{27\cdot2-3}{2}=\frac{31}{6}$$

６．放物線 $y=x^2-x-4$ と直線 $y=x-1$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

解答　$\frac{32}{3}$



放物線と直線の交点の x 座標は，方程式

$x^2-x-4=x-1$　すなわち　$x^2-2x-3=0$

を解いて　$x=-1,\ 3$

$-1\leqq x\leqq 3$ では

$x-1\geqq x^2-x-4$

であるから，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^3\{(x-1)-(x^2-x-4)\}dx$$

$$=\int_{-1}^3(-x^2+2x+3)dx$$

$$=-\int_{-1}^3\{x-(-1)\}(x-3)dx$$

$$=-\frac{-1}{6}\{3-(-1)\}^3=\frac{32}{3}$$

7. 定積分 $\int_1^3 |x^2-4|dx$ を求めよ。

解答 4

$1 \leqq x \leqq 2$ のとき　$|x^2-4| = -(x^2-4)$

$2 \leqq x \leqq 3$ のとき　$|x^2-4| = x^2-4$

よって　$\int_1^3 |x^2-4|dx = \int_1^2 \{-(x^2-4)\}dx + \int_2^3 (x^2-4)dx$

$$= -\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_2^3$$

$$= -2\left(\frac{8}{3}-8\right) + \left(\frac{1}{3}-4\right) + (9-12)$$

$$= 4$$

8. 放物線 $y=x^2$ 上の 2 点 $(-1,\ 1)$，$(2,\ 4)$ における 2 つの接線とこの放物線で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答 $\frac{9}{4}$

$y=x^2$ から　$y'=2x$

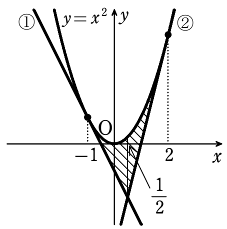
放物線上の点 $(-1,\ 1)$ における接線の方程式は

$y-1=-2(x+1)$

すなわち　$y=-2x-1$　…… ①

同様にして，点 $(2,\ 4)$ における接線の方程式は

$y=4x-4$　…… ②



2 直線 ①，② の交点の x 座標は

$-2x-1=4x-4$ を解いて　$x=\frac{1}{2}$

グラフから，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\{x^2-(-2x-1)\}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\{x^2-(4x-4)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(x+1)^2dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}(x-2)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_{\frac{1}{2}}^{2}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+1\right)^3-0+0-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-2\right)^3$$

$$=\frac{9}{4}$$

9. 直線 $y=kx$ が，放物線 $y=2x-x^2$ と x 軸で囲まれた図形の面積を 2 等分するように，定数 k の値を定めよ。

解答 $k=2-\sqrt[3]{4}$

放物線 $y=2x-x^2$ と直線 $y=kx$ で囲まれた部分の面積を $S(k)$ とする。

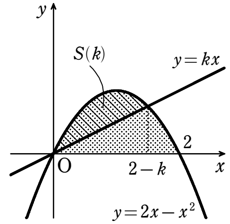
両者の共有点の x 座標は，方程式 $2x-x^2=kx$ を解いて　$x=0,\ 2-k$

面積を 2 等分できるためには　$0<2-k<2$

すなわち　$0<k<2$　…… ①

ここで　$S(k)=\int_0^{2-k}\{(2x-x^2)-kx\}dx$

$$=-\int_0^{2-k}x\{x-(2-k)\}dx=\frac{(2-k)^3}{6}$$



放物線と x 軸 $(y=0\cdot x)$ で囲まれた図形の面積は $S(0)$ であるから，面積を 2 等分するときは

$2S(k)=S(0)$　すなわち　$2\cdot\frac{(2-k)^3}{6}=\frac{2^3}{6}$

よって　$(2-k)^3=4$　ゆえに　$2-k=\sqrt[3]{4}$

したがって　$k=2-\sqrt[3]{4}$　(① を満たす)