数学演習（積分法）Ｈ２１．７．６　　( )組( )番　名前( )

１．次の不定積分，定積分の値を求めよ。

(1) $\int \frac{1}{2}(4x-1)^2dx$

(2) $\int_1^3(x+2)^2dx+\int_1^3(x-2)^2dx$

(3) $\int_0^4(9x^2-2x)dx-\int_2^4(9x^2-2x)dx$

(4) $\int_{-2}^1|x^2-1|dx$

２．曲線 $y=f(x)$ は点 $(1,1)$ を通り，曲線上の各点 (x,y) における接線の傾きは $3x^2+2$ で表される。この曲線の方程式を求めよ。

３．次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。また，(2) では定数 a の値も求めよ。

(1) $f(x)=x^2-\int_0^2 xf(t)dt+2\int_0^1 f(t)dt$

(2) $\int_a^x f(t)dt=x^2+2x-3$

4．次の曲線や直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1) $y=x^2-2x$, $x=-1$, x 軸

(2) $y=x^2+x-2$, $y=-2x^2-2x+4$

(3) $y=x(x-2)^2$, x 軸

5．放物線 $y=x^2-4x+3$ と，この放物線上の２点 $A(4,3)$, $B(0,3)$ における接線とで囲まれた部分の面積 S を求めよ。

6．放物線 $y=-x^2+2x$ と x 軸で囲まれた部分の面積を，直線 $y=kx$ で２等分するように，定数 k の値を定めよ。

数学演習（積分法）Ｈ２１．７．６　　　　（　　）組（　　）番　名前（ ニTニこ ）

1．次の不定積分，定積分の値を求めよ。

(1) $\int \frac{1}{2}(4x-1)^2dx$

$=\frac{1}{2}\int(16x^2-8x+1)dx$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{16}{3}x^3-4x^2+x\right)+C$

$=\frac{8}{3}x^3-2x^2+\frac{1}{2}x+C$

(C：積分定数)

(2) $\int_1^3(x+2)^2dx+\int_1^3(x-2)^2dx$

$=\int_1^3\{(x+2)^2+(x-2)^2\}dx$

$=\int_1^3(x^2+4x+4+x^2-4x+4)dx$

$=\int_1^3(2x^2+8)dx$

$=\left[\frac{2}{3}x^3+8x\right]_1^3=\left(\frac{2}{3}\cdot3^3+8\cdot3\right)-\left(\frac{2}{3}\cdot1^3+8\right)$

$=\frac{100}{3}$

(3) $\int_0^4(9x^2-2x)dx-\int_2^4(9x^2-2x)dx$

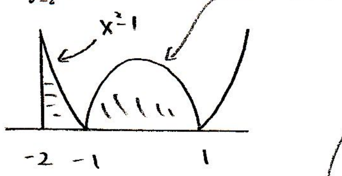
$=\int_0^4(9x^2-2x)dx+\int_4^2(9x^2-2x)dx$

$=\int_0^2(9x^2-2x)dx$

$=\left[3x^3-x^2\right]_0^2$

$=3\cdot2^3-2^2=24-4=20$

(4) $\int_{-2}^1|x^2-1|dx$



$\int_{-2}^1|x^2-1|dx$

$=\int_{-2}^{-1}|x^2-1|dx+\int_{-1}^1|x^2-1|dx$

$=\int_{-2}^{-1}(x^2-1)dx+\int_{-1}^1(-x^2+1)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_{-2}^{-1}+2\int_0^1(-x^2+1)dx$

$=\frac{1}{3}(-1)^3-(-1)-\left\{\frac{1}{3}(-2)^3-(-2)\right\}+2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1$

$=\frac{7}{3}-1+2\left(-\frac{1}{3}+1\right)$

$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$

2．曲線 $y=f(x)$ は点 $(1,1)$ を通り，曲線上の各点 (x,y) における接線の傾きは $3x^2+2$ で表される。この曲線の方程式を求めよ。

条件より

$f'(x)=3x^2+2$ …①

$f(1)=1$ …②

が成り立つ。①より

$f(x)=\int(3x^2+2)dx$

$=x^3+2x+C$

となるので，②から

$f(1)=1^3+2\cdot1+C$

∴ $1=1+2+C$

より $C=-2$

以上より

$f(x)=x^3+2x-2$

3．次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。また，(2) では定数 a の値も求めよ。

(1) $f(x)=x^2-\int_0^2xf(t)dt+2\int_0^1f(t)dt$ $=x^2-x\int_0^2f(t)dt+2\int_0^1f(t)dt$

よって $a=\int_0^2f(t)dt$, $b=\int_0^1f(t)dt$ とおくと

$f(x)=x^2-ax+2b$ となる。ここで

$a=\int_0^2f(t)dt$

$=\int_0^2(t^2-at+2b)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}at^2+2bt\right]_0^2$

$=\frac{8}{3}-2a+4b$

∴

$a=\frac{8}{3}-2a+4b$

より

$3a-4b=\frac{8}{3}$ …①

$b=\int_0^1f(t)dt$

$=\int_0^1(t^2-at+2b)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}at^2+2bt\right]_0^1$

$=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a+2b$

∴ $b=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a+2b$ より

$\frac{1}{2}a-b=\frac{1}{3}$ …②

①②より

$a=\frac{4}{3}$, $b=\frac{1}{3}$

よって $f(x)=x^2-\frac{4}{3}x+2\cdot\frac{1}{3}$

$=x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$

また，

(2) $\int_a^xf(t)dt=x^2+2x-3$

$\int_a^xf(t)dt=x^2+2x-3$ …(*)

両辺 x で微分して

$f(x)=2x+2$

また(*)式の x に a を代入して

$\int_a^af(t)dt=a^2+2a-3$

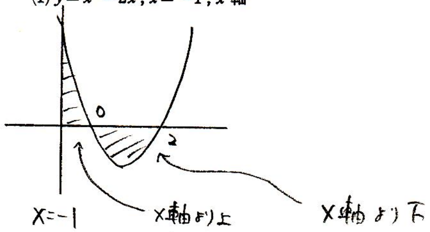
∴

$0=(a+3)(a-1)$

$a=-3, 1$

4．次の曲線や直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1) $y=x^2-2x$, $x=-1$, x 軸



$$S=\int_{-1}^{0}(x^2-2x)dx-\int_{0}^{2}(x^2-2x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}-\int_0^2 x(x-2)dx$$

$$=\left(\frac{1}{3}\cdot 0^3-0^2\right)-\left\{\frac{1}{3}(-1)^3-(-1)^2\right\}-\left(-\frac{1}{6}\right)(2-0)^3$$

$$=-\left(-\frac{1}{3}-1\right)+\frac{1}{6}\cdot 2^3$$

$$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

(2) $y=x^2+x-2$, $y=-2x^2-2x+4$

2曲線の交点は

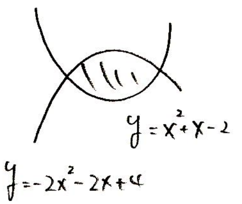
$x^2+x-2=-2x^2-2x+4$

$3x^2+3x-6=0$

$x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-2, 1$



よって $S=\int_{-1}^{2}\{(-2x^2-2x+4)-(x^2+x-2)\}dx$

$$=\int_{-1}^{2}(-3x^2-3x+6)dx$$

$$=-3\int_{-1}^{2}(x^2+x-2)dx$$

$$=-3\int_{-1}^{2}(x+2)(x-1)dx$$

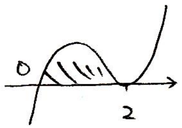
$$=-3\left(-\frac{1}{6}\right)\{1-(-2)\}^3$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 3^3=\frac{27}{2}$$

(3) $y=x(x-2)^2$, x 軸

（$(x-2)^2$ より このグラフは $x=2$ で接する
また、$x=0$ と 2 で x軸と交点を持つ）

グラフ



x軸より上なので

$$S=\int_0^2 x(x-2)^2dx$$

$$=\int_0^2(x-2+2)(x-2)^2dx$$

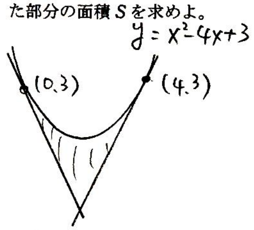
$$=\int_0^2\{(x-2)^3+2(x-2)^2\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}(x-2)^4+\frac{2}{3}(x-2)^3\right]_0^2$$

$$=\left(\frac{1}{4}0^4+\frac{2}{3}\cdot 0^3\right)-\left\{\frac{1}{4}(-2)^4+\frac{2}{3}(-2)^3\right\}$$

$$=-\left(4-\frac{16}{3}\right)=\frac{4}{3}$$

5．放物線 $y=x^2-4x+3$ と，この放物線上の2点 $A(4,3)$, $B(0,3)$ における接線とで囲まれた部分の面積 S を求めよ。



$y'=2x-4$ より

点A(4,3)における接線の傾きは

$2\cdot 4-4=4$

$\therefore$

$y-3=4(x-4)$

より

$y=4x-13$

同様に 点B(0,3) における接線の傾きは

$y'=2\cdot 0-4$

$=-4$

より

接線の方程式は

$y-3=-4(x-0)$

$\therefore\ y=-4x+3$

この2接線 $\begin{cases} y=4x-13 \\ y=-4x+3 \end{cases}$ の交点は

$4x-13=-4x+3$

$\therefore\ x=2$

以上より求める面積Sは

$$S=\int_0^2\{(x^2-4x+3)-(-4x+3)\}dx+\int_2^4\{(x^2-4x+3)-(4x-13)\}dx$$

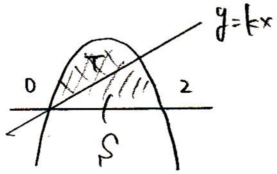
$$=\int_0^2 x^2dx+\int_2^4(x^2-8x+16)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_2^4$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 2^3+\frac{1}{3}\cdot 2^3$$

$$=\frac{16}{3}$$

6．放物線 $y=-x^2+2x$ と x 軸で囲まれた部分の面積を，直線 $y=kx$ で2等分するように，定数 k の値を定めよ。



$y=-x^2+2x$ と x軸で囲まれた部分をS,

$y=-x^2+2x$ と $y=kx$ で囲まれた部分をT とする。

すると

$$S=\int_0^2(-x^2+2x)dx$$

$$=-\int_0^2 x(x-2)dx$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)(2-0)^3$$

$$=\frac{1}{6}\cdot 2^3$$

また

$y=-x^2+2x$ と $y=kx$ の交点は

$-x^2+2x=kx$

$x(x+k-2)=0$

$\therefore\ x=0, 2-k$

よって

$$T=\int_0^{2-k}\{(-x^2+2x)-kx\}dx$$

$$=-\int_0^{2-k}x\{x-(2-k)\}dx$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)(2-k-0)^3$$

$$=\frac{1}{6}(2-k)^3$$

ここで $S=2T$ より

$$\frac{1}{6}\cdot 2^3=2\cdot\frac{1}{6}(2-k)^3$$

$$2^2=(2-k)^3$$

$\therefore$

$$2-k=\sqrt[3]{4}$$

よって

$$k=2-\sqrt[3]{4}$$