統一テスト（微分法と積分法A）Ｈ３１．１．１０　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 次の極限値を求めよ。　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-3^2}{h}$

$\boxed{2}$ 次の関数を微分せよ。　$y=x^3-5x^2-6$

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)=-x^3+4x^2-2$ について，$x=-1$ における微分係数を求めよ。

$\boxed{4}$ 関数 $y=2x^2-4$ のグラフ上の $(1,\ -2)$ における接線の方程式を求めよ。

$\boxed{5}$ 関数 $y=2x^3-3x^2+1$ の増減を調べ，極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

$\boxed{6}$ 次の関数の最大値と最小値を求めよ。　$y=-2x^3+3x^2+12x\quad(-2\leqq x\leqq 4)$

$\boxed{7}$ 次の中から，$4x^3$ の原始関数であるものを選べ。

①　$12x^2$　　②　x^4　　③　x^3　　④　x^4+3

$\boxed{8}$ 次の不定積分を求めよ。　$\displaystyle\int\left(3x^2-\frac{2}{3}x+1\right)dx$

$\boxed{9}$ 次の定積分を求めよ。　$\displaystyle\int_{-3}^{-1}(2x^2+3)dx-\int_{1}^{-1}(2x^2+3)dx$

$\boxed{10}$ 次の定積分を求めよ。　$\displaystyle\int_{-2}^{2}(x-2)^2dx$

$\boxed{11}$ 放物線 $y=-x^2+4x$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$\boxed{12}$ 2 つの放物線 $y=x^2-2x+1$，$y=-x^2+4x+1$ と 2 直線 $x=1$，$x=2$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

統一テスト（微分法と積分法B）Ｈ３１．１．１０　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

$\boxed{1}$ 2 次関数 $f(x)$ が等式 $f(x)+xf'(x)=6x^2-9x+1$ を満たすとき，$f(x)$ を求めよ。

$\boxed{2}$ 曲線 $y=x^3+3x^2+6x-10$ 上の点における接線のうち，傾きが最小となるものの方程式を求めよ。

$\boxed{3}$ 関数 $y=x^3+2$ のグラフに点 C$(0,\ 4)$ から引いた接線の方程式を求めよ。

$\boxed{4}$ 関数 $g(x)=x^3+kx^2-3kx+2$ が極値をもたないように，定数 k の値の範囲を定めよ。

$\boxed{5}$ 方程式 $x^3-3x^2-9x=a$ が異なる 3 個の実数解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

$\boxed{6}$ 等式 $f(x)=x+\int_0^3 f(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$\boxed{7}$ 放物線 $y=x^2+2x-1$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$\boxed{8}$ 放物線 $y=2+x-x^2$ と x 軸で囲まれた部分の面積を，点$(2,\ 0)$ を通る直線 g で 2 等分するとき，g の傾きを求めよ。

1 次の極限値を求めよ。　$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{(3+h)^2-3^2}{h}$

かっこなし -1

解答　6

(与式)$=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{9+6h+h^2-9}{h}=\lim_{h\to0}\frac{6h+h^2}{h}=\lim_{h\to0}(6+h)=6$

2 次の関数を微分せよ。　$y=x^3-5x^2-6$

解答　$3x^2-10x$

$y'=(x^3)'-5(x^2)'-(6)'=3x^2-5\cdot2x-0=3x^2-10x$

3 関数 $f(x)=-x^3+4x^2-2$ について，$x=-1$ における微分係数を求めよ。

解答　-11

$f(x)$ を微分すると　　$f'(x)=-3x^2+8x$

$f'(-1)=-3\cdot(-1)^2+8\cdot(-1)=-11$

4 関数 $y=2x^2-4$ のグラフ上の $(1,\ -2)$ における接線の方程式を求めよ。

解答　$y=4x-6$

$y=2x^2-4$ から　　$y'=4x$

よって，点 $(1,\ -2)$ における接線の傾きは　　$4\cdot1=4$

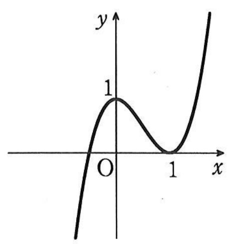
したがって，求める接線の方程式は　　$y-(-2)=4(x-1)$

すなわち　　$y=4x-6$

5 関数 $y=2x^3-3x^2+1$ の増減を調べ，極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

解答　$x=0$ で極大値 1，$x=1$ で極小値 0；[図]　6

4



不備 -1

2

$y'=6x^2-6x=6x(x-1)$

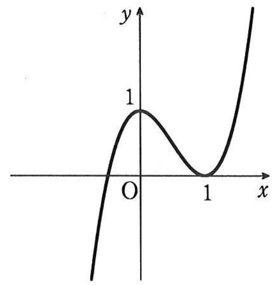
$y'=0$ とすると　　$x=0,\ 1$

y の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	+	0	−	0	+
y	↗	極大 1	↘	極小 0	↗

したがって，この関数は $x=0$ で極大値 1，$x=1$ で極小値 0 をとる。

また，グラフは [図] のようになる。



6 次の関数の最大値と最小値を求めよ。　$y=-2x^3+3x^2+12x\quad(-2\leqq x\leqq4)$

解答　$x=2$ で最大値 20，$x=4$ で最小値 -32

$y'=-6x^2+6x+12=-6(x^2-x-2)=-6(x+1)(x-2)$

$y'=0$ とすると　　$x=-1,\ 2$

y の増減表は，次のようになる。

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
y'		−	0	+	0	−	
y	4	↘	-7	↗	20	↘	-32

よって，この関数は $x=2$ で最大値 20 をとり，$x=4$ で最小値 -32 をとる。

7 次の中から，$4x^3$ の原始関数であるものを選べ。

①　$12x^2$　　②　x^4　　③　x^3　　④　x^4+3

解答　②，④

①　$(12x^2)'=24x$

②　$(x^4)'=4x^3$

③　$(x^3)'=3x^2$

④　$(x^4+3)'=4x^3$

よって　　②，④

8 次の不定積分を求めよ。　$\displaystyle\int\left(3x^2-\frac{2}{3}x+1\right)dx$

解答　C は積分定数とする。　$x^3-\dfrac{1}{3}x^2+x+C$

C は積分定数とする。

(与式)$=3\cdot\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}x^2+x+C=x^3-\dfrac{1}{3}x^2+x+C$

9 次の定積分を求めよ。　$\displaystyle\int_{-3}^{-1}(2x^2+3)dx-\int_{1}^{-1}(2x^2+3)dx$

解答　$\dfrac{92}{3}$

(与式)$=\displaystyle\int_{-3}^{-1}(2x^2+3)dx+\int_{-1}^{1}(2x^2+3)dx=\int_{-3}^{1}(2x^2+3)dx$

$\displaystyle=\left[\frac{2}{3}x^3+3x\right]_{-3}^{1}=\left(\frac{2}{3}+3\right)-(-18-9)=\frac{92}{3}$

10 次の定積分を求めよ。　$\displaystyle\int_{-2}^{2}(x-2)^2dx$

解答　$\dfrac{64}{3}$

(与式)$=\displaystyle\int_{-2}^{2}(x^2-4x+4)dx=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right]_{-2}^{2}$

$\displaystyle=\left(\frac{8}{3}-8+8\right)-\left(-\frac{8}{3}-8-8\right)=\frac{64}{3}$

参考　n が 0 以上の整数のとき

$\displaystyle\int_{-a}^{a}x^{2n+1}dx=0,\quad\int_{-a}^{a}x^{2n}dx=2\int_{0}^{a}x^{2n}dx$

これを用いると

$\displaystyle\int_{-2}^{2}(x^2-4x+4)dx=2\int_{0}^{2}(x^2+4)dx=2\left[\frac{x^3}{3}+4x\right]_{0}^{2}$

$\displaystyle=2\left\{\left(\frac{8}{3}+8\right)-0\right\}=\frac{64}{3}$

11 放物線 $y=-x^2+4x$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

解答　$\dfrac{32}{3}$

この放物線と x 軸の交点の x 座標は，

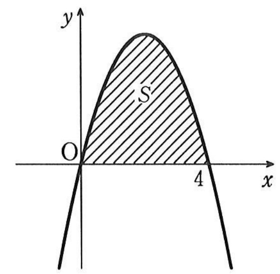
$-x^2+4x=0$

を解いて　　$x=0,\ 4$

$0\leqq x\leqq4$ では $y\geqq0$ であるから

$\displaystyle S=\int_{0}^{4}(-x^2+4x)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2\right]_{0}^{4}$

$\displaystyle=\left(-\frac{64}{3}+32\right)-0=\frac{32}{3}$



別解　[積分の計算]

$\displaystyle S=\int_{0}^{4}\{-x(x-4)\}dx=\frac{(4-0)^3}{6}=\frac{32}{3}$

12 2 つの放物線 $y=x^2-2x+1$，$y=-x^2+4x+1$ と 2 直線 $x=1$，$x=2$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

解答　$\dfrac{13}{3}$

図のように，$1\leqq x\leqq2$ では

$x^2-2x+1<-x^2+4x+1$

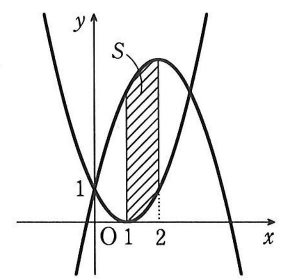
よって

$\displaystyle S=\int_{1}^{2}\{(-x^2+4x+1)-(x^2-2x+1)\}dx$

$\displaystyle=\int_{1}^{2}(-2x^2+6x)dx$

$\displaystyle=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2\right]_{1}^{2}$

$\displaystyle=\left(-\frac{16}{3}+12\right)-\left(-\frac{2}{3}+3\right)=\frac{13}{3}$



/50

1 2次関数 $f(x)$ が等式 $f(x)+xf'(x)=6x^2-9x+1$ を満たすとき，$f(x)$ を求めよ。

解答　$f(x)=2x^2-\dfrac{9}{2}x+1$　6

$f(x)=ax^2+bx+c$ とすると　$f'(x)=2ax+b$

与えられた等式に代入して

$$ax^2+bx+c+x(2ax+b)=6x^2-9x+1$$

式を整理して

$$(3a-6)x^2+(2b+9)x+(c-1)=0$$

これが x についての恒等式であるから

$$3a-6=0,\ 2b+9=0,\ c-1=0$$

よって　$a=2,\ b=-\dfrac{9}{2},\ c=1$　各△2（最大△4）

したがって　$f(x)=2x^2-\dfrac{9}{2}x+1$

2 曲線 $y=x^3+3x^2+6x-10$ 上の点における接線のうち，傾きが最小となるものの方程式を求めよ。

解答　$y=3x-11$　6

$y'=3x^2+6x+6=3(x+1)^2+3$

$x=-1$ のとき y' は最小値3をとり，接線の傾きが最小となる。　△3

$x=-1$ のとき　$y=-14,\ y'=3$

よって，求める接線の方程式は　$y-(-14)=3\{x-(-1)\}$

すなわち　$y=3x-11$

3 関数 $y=x^3+2$ のグラフに点 C(0, 4) から引いた接線の方程式を求めよ。

解答　$y=3x+4$　6

$y=x^3+2$ より　$y'=3x^2$

接点の座標を $(a,\ a^3+2)$ とすると，接線の方程式は　$y-(a^3+2)=3a^2(x-a)$

すなわち　$y=3a^2x-2a^3+2$　……①

この直線が点 C(0, 4) を通るから　$4=-2a^3+2$

式を整理して　$a^3=-1$

a は実数であるから　$a=-1$　△4

ゆえに，接線の方程式は，① より　$y=3x+4$

4 関数 $g(x)=x^3+kx^2-3kx+2$ が極値をもたないように，定数 k の値の範囲を定めよ。

解答　$-9\leqq k\leqq 0$　6　イコール △−2

$g'(x)=3x^2+2kx-3k$

$g(x)$ が極値をもたないための条件は，$g'(x)$ の符号が変わらないこと，すなわち2次方程式 $g'(x)=0$ が実数解を1つだけもつか，または実数解をもたないことである。

この2次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=k^2-3\cdot(-3k)=k^2+9k=k(k+9)$$

条件を満たすのは $D\leqq 0$ のときであるから　$k(k+9)\leqq 0$

これを解いて　$-9\leqq k\leqq 0$

5 方程式 $x^3-3x^2-9x=a$ が異なる3個の実数解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

解答　$-27<a<5$　6

関数 $y=x^3-3x^2-9x$ について　$y'=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$y'=0$ とすると　$x=-1,\ 3$

y の増減表は，次のようになる。　増減表なし (−3)

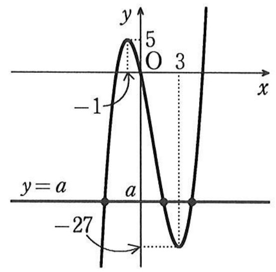
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	5	↘	-27	↗

△3

よって，$y=x^3-3x^2-9x$ のグラフは図のようになる。

このグラフと直線 $y=a$ が異なる3個の共有点をもつから

$-27<a<5$



6 等式 $f(x)=x+\displaystyle\int_0^3 f(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

解答　$f(x)=x-\dfrac{9}{4}$　6

$\displaystyle\int_0^3 f(t)\,dt=a$（$a$ は定数）とおくと

$$f(x)=x+a$$

よって　$\displaystyle\int_0^3 f(t)\,dt=\int_0^3 (t+a)\,dt=\left[\frac{t^2}{2}+at\right]_0^3=\frac{9}{2}+3a$

$\dfrac{9}{2}+3a=a$ より　$a=-\dfrac{9}{4}$　△4

したがって　$f(x)=x-\dfrac{9}{4}$

7 放物線 $y=x^2+2x-1$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$\frac{1}{6}$の公式を使うこと

解答　$\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$　6

放物線と x 軸の交点の x 座標は，方程式 $x^2+2x-1=0$ の解である。

これを解くと　$x=-1-\sqrt{2},\ -1+\sqrt{2}$

よって，$\alpha=-1-\sqrt{2},\ \beta=-1+\sqrt{2}$ とすると

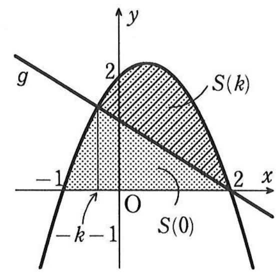
$$S=\int_\alpha^\beta\{-(x^2+2x-1)\}dx$$

$$=\int_\alpha^\beta\{-(x-\alpha)(x-\beta)\}dx=\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$

$$=\frac{(2\sqrt{2})^3}{6}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

8 放物線 $y=2+x-x^2$ と x 軸で囲まれた部分の面積を，点 (2, 0) を通る直線 g で2等分するとき，g の傾きを求めよ。

解答　$\dfrac{3\sqrt[3]{4}-6}{2}$　8



点 (2, 0) を通り，x 軸に垂直な直線は条件を満たさない。

よって，直線 g の方程式を $y=k(x-2)$ とおく。

放物線 $y=2+x-x^2$ と直線 g で囲まれた部分の面積を $S(k)$ とする。

放物線と直線の交点の x 座標は，方程式

$$2+x-x^2=k(x-2)$$

を解いて　$x=2,\ -k-1$　△3

条件を満たすとき

$-1<-k-1<2$　すなわち　$-3<k<0$　……①

ここで

$$S(k)=\int_{-k-1}^{2}\{(2+x-x^2)-k(x-2)\}dx=-\int_{-k-1}^{2}(x+k+1)(x-2)dx$$

$$=\frac{1}{6}\{2-(-k-1)\}^3=\frac{1}{6}(k+3)^3$$

放物線 $y=2+x-x^2$ と x 軸で囲まれた図形の面積は $S(0)$ であるから，面積を2等分するとき

$2S(k)=S(0)$　すなわち　$2\cdot\dfrac{1}{6}(k+3)^3=\dfrac{3^3}{6}$　△3

よって　$(k+3)^3=\dfrac{27}{2}$

すなわち　$k+3=\sqrt[3]{\dfrac{27}{2}}=\sqrt[3]{\dfrac{27\times 2^2}{2\times 2^2}}=\dfrac{3\sqrt[3]{4}}{2}$

したがって　$k=\dfrac{3\sqrt[3]{4}-6}{2}$　（これは ① を満たす）

y=ax+b とおくと
多し

以上より，g の傾きは　$\dfrac{3\sqrt[3]{4}-6}{2}$

/50