第４回定期考査（微分法•積分法）Ｈ２９．１２．８　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　)

$\boxed{1}$ 関数$y=x^2-2x+2$の，$x=1$ から $x=3$ までの平均変化率を求めよ。

$\boxed{2}$ **定義に従って**，次の関数 $f(x)$ の導関数を求めよ。$f(x)=x^2+2x+1$

$\boxed{3}$ 次の関数を微分せよ。

(1) $y=-4x-1$　　(2) $y=-3x^2+6x-5$　　(3) $y=-2x^3+6x^2+4x$

$\boxed{4}$ 関数 $y=2x^2-4$ のグラフ上の点 $(1,\ -2)$ における接線の方程式を求めよ。

$\boxed{5}$ 関数 $y=x^2+3$ のグラフに点 $\mathrm{C}(1,\ 0)$ から引いた接線の方程式を求めよ。

$\boxed{6}$ 次の関数の増減を調べ，極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。　$y=2x^3-3x^2+1$

$\boxed{7}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int(-2)dx$　　(2) $\int(1-x-x^2)dx$　　(3) $\int\left(3x^2-\frac{2}{3}x+1\right)dx$

$\boxed{8}$ 次の定積分を求めよ。　$\int_0^2(x+1)^2dx+\int_0^2(x-1)^2dx$

$\boxed{9}$ 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_1^1(4x^2+x-3)dx$　　(2) $\int_{-3}^{-1}(2x^2+3)dx-\int_1^{-1}(2x^2+3)dx$

$\boxed{10}$ 次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。　$\int_a^x f(t)dt=x^2-3x+2$

$\boxed{11}$ 次の放物線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。$y=x^2-4x$

$\boxed{12}$ 次の 2 つの放物線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。$y=x^2-4x+2$, $y=-x^2+2x-2$

$\boxed{13}$ 関数 $f(x)=x^3+ax+b$ が $x=-1$ で極大値 4 をとるように，定数 a, b の値を定めよ。
また，極小値を求めよ。

$\boxed{14}$ 関数 $f(x)=x^3+kx^2+2x+3$ が常に増加するように，定数 k の値の範囲を定めよ。

$\boxed{15}$ 次の定積分を求めよ。 $\int_0^3 |x^2-4|\,dx$

$\boxed{16}$ 曲線 C : $y=x^3+3x^2+x$ と点 A $(1,\ a)$ がある。次の問いに答えよ。

(1) 曲線 C 上の点 $(t,\ t^3+3t^2+t)$ における接線が点Aを通るとき，a を t で表せ。

(2) A を通って C に 3 本の接線が引けるとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{17}$ 関数 $f(x)=x^3-10x^2-25x+30$ の極大値と極小値の差を求めよ。

1 関数$y=x^2-2x+2$の，$x=1$ から $x=3$ までの平均変化率を求めよ。

解答 2　4

解説

$y=f(x)$ とする。

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{(3^2-2\cdot3+2)-(1^2-2\cdot1+2)}{3-1}=\frac{4}{2}=2$$

2 定義に従って，次の関数 $f(x)$ の導関数を求めよ。$f(x)=x^2+2x+1$

かっこなし -1

解答 $2x+2$　4

lim がない、書き方がダメ → 不可

解説

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\{(x+h)^2+2(x+h)+1\}-(x^2+2x+1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{2xh+h^2+2h}{h}=\lim_{h\to0}(2x+h+2)=2x+2$$

3 次の関数を微分せよ。

(1) $y=-4x-1$　(2) $y=-3x^2+6x-5$　(3) $y=-2x^3+6x^2+4x$

解答 (1) $y'=-4$　3　(2) $y'=-6x+6$　3　(3) $y'=-6x^2+12x+4$　3

$y=-4x-1$
$=-4$
は -1
「y=」は -2

解説

(1) $y'=-4(x)'-(1)'=-4\cdot1-0=-4$

(2) $y'=-3(x^2)'+6(x)'-(5)'=-3\cdot2x+6\cdot1-0=-6x+6$

(3) $y'=-2(x^3)'+6(x^2)'+4(x)'=-2\cdot3x^2+6\cdot2x+4\cdot1=-6x^2+12x+4$

4 関数 $y=2x^2-4$ のグラフ上の点 $(1,\ -2)$ における接線の方程式を求めよ。

解答 $y=4x-6$　5

解説

$y=2x^2-4$ から　$y'=4x$

よって，点 $(1,\ -2)$ における接線の傾きは　$4\cdot1=4$　-2

したがって，求める接線の方程式は　$y-(-2)=4(x-1)$

すなわち　$y=4x-6$

5 関数 $y=x^2+3$ のグラフに点 C(1, 0) から引いた接線の方程式を求めよ。

解答 $y=-2x+2$，$y=6x-6$　6

解説

$y=x^2+3$ より　$y'=2x$

接点の座標を $(a,\ a^2+3)$ とすると，接線の傾きは $2a$ となるから，

その方程式は　$y-(a^2+3)=2a(x-a)$

すなわち　$y=2ax-a^2+3$ ……①

この直線が点 C(1, 0) を通るから　$0=2a\cdot1-a^2+3$

式を整理して　$a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0$ より　$a=-1,\ 3$　-3

よって，求める接線の方程式は，① より

$a=-1$ のとき　$y=-2x+2$

$a=3$ のとき　$y=6x-6$

したがって　$y=-2x+2$，$y=6x-6$

6 次の関数の増減を調べ，極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。　$y=2x^3-3x^2+1$

解答 $x=0$ で極大値 1，$x=1$ で極小値 0；[図]　7

-4

原点，x軸，y軸なし -1

形がおかしい -1

解説

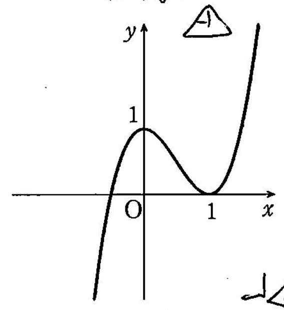
$y'=6x^2-6x=6x(x-1)$

$y'=0$ とすると　$x=0,\ 1$

y の増減表は，次のようになる。

x	…	0	…	1	…
y'	+	0	−	0	+
y	↗	極大 1	↘	極小 0	↗

-2



-3

したがって，この関数は $x=0$ で極大値 1，$x=1$ で極小値 0 をとる。

また，グラフは [図] のようになる。　-2　最大・最小 -1

7 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int(-2)dx$　(2) $\int(1-x-x^2)dx$　(3) $\int\left(3x^2-\frac{2}{3}x+1\right)dx$

解答 C は積分定数とする。

(1) $-2x+C$　3　(2) $x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+C$　3　(3) $x^3-\frac{1}{3}x^2+x+C$　3

解説

C は積分定数とする。

(1) (与式)$=-2x+C$

(2) (与式)$=x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+C$

(3) (与式)$=3\cdot\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}x^2+x+C=x^3-\frac{1}{3}x^2+x+C$

Cなし -1

約分 -1

積なかった -2

8 次の定積分を求めよ。　$\int_0^2(x+1)^2dx+\int_0^2(x-1)^2dx$

解答 $\frac{28}{3}$　4

解説

(与式)$=\int_0^2\{(x+1)^2+(x-1)^2\}dx=\int_0^2(2x^2+2)dx$　-2　dxなし -1

$=\left[\frac{2}{3}x^3+2x\right]_0^2=\left(\frac{16}{3}+4\right)-0=\frac{28}{3}$

9 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_1^1(4x^2+x-3)dx$　(2) $\int_{-3}^{-1}(2x^2+3)dx-\int_1^{-1}(2x^2+3)dx$

解答 (1) 0　(2) $\frac{92}{3}$　dxなし -1

3　4

解説

(1) (与式)$=0$

(2) (与式)$=\int_{-3}^{-1}(2x^2+3)dx+\int_{-1}^{1}(2x^2+3)dx=\int_{-3}^{1}(2x^2+3)dx$　-2

$=\left[\frac{2}{3}x^3+3x\right]_{-3}^{1}=\left(\frac{2}{3}+3\right)-(-18-9)=\frac{92}{3}$

10 次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。　$\int_a^x f(t)dt=x^2-3x+2$

-3　-3

解答 $f(x)=2x-3$；$a=1,\ 2$　6

解説

等式の両辺の関数を x で微分すると

$f(x)=2x-3$

また，与えられた等式で $x=a$ とおくと，左辺は 0 になるから

$0=a^2-3a+2$

すなわち　$a^2-3a+2=0$

$(a-1)(a-2)=0$ より　$a=1,\ 2$

したがって　$f(x)=2x-3$；$a=1,\ 2$

11 次の放物線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。$y=x^2-4x$

中かっこなし -1

解答 $\frac{32}{3}$　5

解説

この放物線と x 軸の交点の x 座標は，

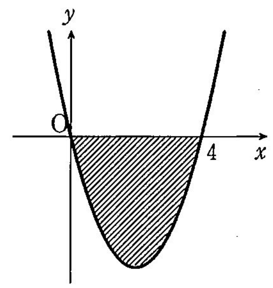
$x^2-4x=0$

を解いて　$x=0,\ 4$　途可 -2

$0\leqq x\leqq4$ では $y\leqq0$ であるから

$S=\int_0^4\{-(x^2-4x)\}dx=\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2\right]_0^4$

$=\left(-\frac{64}{3}+32\right)-0=\frac{32}{3}$



別解 [積分の計算]

$S=\int_0^4\{-x(x-4)\}dx=\frac{(4-0)^3}{6}=\frac{32}{3}$

22　22　22

66

12 次の2つの放物線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。$y=x^2-4x+2$, $y=-x^2+2x-2$

解答 $\frac{1}{3}$

解説 5

2つの放物線の交点の x 座標は,

方程式 $x^2-4x+2=-x^2+2x-2$

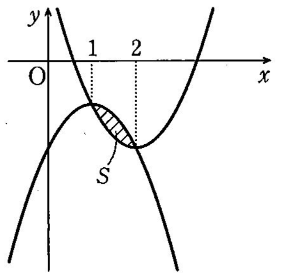
の解である。

式を整理して　$2x^2-6x+4=0$

$2(x-1)(x-2)=0$ より　$x=1,\ 2$

$1\leqq x\leqq 2$ では, $x^2-4x+2\leqq -x^2+2x-2$

であるから



$$S=\int_1^2\{(-x^2+2x-2)-(x^2-4x+2)\}dx$$ 2

$$=\int_1^2(-2x^2+6x-4)dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2-4x\right]_1^2$$

$$=\left(-\frac{16}{3}+12-8\right)-\left(-\frac{2}{3}+3-4\right)=\frac{1}{3}$$

別解 [積分の計算]

$$S=\int_1^2(-2x^2+6x-4)dx$$

$$=\int_1^2\{-2(x-1)(x-2)\}dx=\frac{2}{6}(2-1)^3=\frac{1}{3}$$

13 関数 $f(x)=x^3+ax+b$ が $x=-1$ で極大値4をとるように,定数 a, b の値を定めよ。
また,極小値を求めよ。

2　2　2　←　増減表がないとダメ

解答 $a=-3$, $b=2$; $x=1$ で極小値0　6

解説

$f'(x)=3x^2+a$

$f(x)$ が $x=-1$ で極大値4をとるとき　$f'(-1)=0$, $f(-1)=4$

よって　$3+a=0$, $-1-a+b=4$

これを解くと　$a=-3$, $b=2$

このとき　$f(x)=x^3-3x+2$

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

これより,次の増減表が得られる。

x	…	-1	…	1	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 4	↘	極小 0	↗

よって, $f(x)$ は $x=-1$ で極大値4をとり,条件を満たす。

したがって　$a=-3$, $b=2$; $x=1$ で極小値0

14 関数 $f(x)=x^3+kx^2+2x+3$ が常に増加するように,定数 k の値の範囲を定めよ。

解答 $-\sqrt{6}\leqq k\leqq\sqrt{6}$　5　　イコールなし -1

解説

$f'(x)=3x^2+2kx+2$

3次関数 $f(x)$ が常に増加するための条件は, $f'(x)\geqq 0$ が常に成り立つことである。

$f'(x)=3x^2+2kx+2$ について,常に $f'(x)\geqq 0$ であるための条件は, $f'(x)=0$ が実数解を1つだけもつか,または実数解をもたないことである。

この2次方程式の判別式を D とすると

16

$$\frac{D}{4}=k^2-3\cdot 2=k^2-6$$ 2

条件を満たすのは $D\leqq 0$ のときであるから　$k^2-6\leqq 0$

これを解いて　$-\sqrt{6}\leqq k\leqq\sqrt{6}$

15 次の定積分を求めよ。 $\int_0^3|x^2-4|dx$　　解答 $\frac{23}{3}$　5

解説

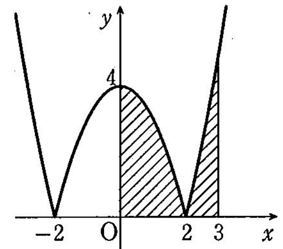
$|x^2-4|=|(x+2)(x-2)|$ であるから

$x\leqq -2$, $2\leqq x$ のとき

$|x^2-4|=x^2-4$

$-2\leqq x\leqq 2$ のとき

$|x^2-4|=-x^2+4$



$$(\text{与式})=\int_0^2(-x^2+4)dx+\int_2^3(x^2-4)dx$$ 1

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_0^2+\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_2^3$$

$$=\left\{\left(-\frac{8}{3}+8\right)-0\right\}+\left\{(9-12)-\left(\frac{8}{3}-8\right)\right\}$$

$$=\frac{23}{3}$$

16 曲線 C : $y=x^3+3x^2+x$ と点 A $(1,\ a)$ がある。次の問いに答えよ。

(1) 曲線 C 上の点 $(t,\ t^3+3t^2+t)$ における接線が点Aを通るとき, a を t で表せ。

(2) A を通って C に3本の接線が引けるとき,定数 a の値の範囲を求めよ。

解答 (1)　$a=-2t^3+6t+1$　(2)　$-3<a<5$

解説　4　4

(1)

$y'=3x^2+6x+1$ であるから,曲線 C 上の点 $(t,\ t^3+3t^2+t)$ における接線の方程式は

$$y-(t^3+3t^2+t)=(3t^2+6t+1)(x-t)$$

すなわち　$y=(3t^2+6t+1)x-2t^3-3t^2$　1

この接線が点 $(1,\ a)$ を通るとすると

$$a=(3t^2+6t+1)\cdot 1-2t^3-3t^2$$

ゆえに

$$a=-2t^3+6t+1$$

(2)　$f(t)=-2t^3+6t+1$ とすると

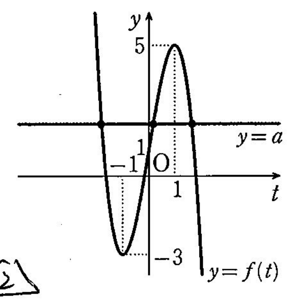
$f'(t)=-6t^2+6=-6(t+1)(t-1)$

$f'(t)=0$ とすると　$t=\pm 1$

$f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	…	-1	…	1	…
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	↘	極小 -3	↗	極大 5	↘

2



3次関数のグラフでは,接点が異なると接線が異なるから, t の3次方程式①が異なる3個の実数解をもつとき,点Aから曲線 C に3本の接線が引ける。

したがって,曲線 $y=f(t)$ と直線 $y=a$ が異なる3点で交わる条件を求めて

$$-3<a<5$$

13

17 関数 $f(x)=x^3-10x^2-25x+30$ の極大値と極小値の差を求めよ。

解答 $\frac{3500\sqrt{7}}{27}$

解説　5

$f'(x)=3x^2-20x-25$ より $f'(x)=0$ となる x は $x=\frac{10\pm 5\sqrt{7}}{3}$

以下, $\alpha=\frac{10-5\sqrt{7}}{3}$, $\beta=\frac{10+5\sqrt{7}}{3}$ とする。増減表より

x	…	α	…	β	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 $f(\alpha)$	↘	極小 $f(\beta)$	↗

ここで,多項式 $x^3-10x^2-25x+30$ を多項式 $3x^2-20x-25$ で割ると,

商が $\frac{1}{3}x-\frac{10}{9}$,余りが $-\frac{350}{9}x+\frac{20}{9}$

であるので, $f(x)$ は

$$
\begin{array}{rl}
 & \frac{1}{3}x-\frac{10}{9} \\
3x^2-20x-25 \,\big) & x^3-10x^2-25x+30 \\
 & x^3-\frac{20}{3}x^2-\frac{25}{3}x \\ \hline
 & -\frac{10}{3}x^2-\frac{50}{3}x+30 \\
 & -\frac{10}{3}x^2+\frac{200}{9}x+\frac{250}{9} \\ \hline
 & -\frac{350}{9}x+\frac{20}{9}
\end{array}
$$

$$f(x)=(3x^2-20x-25)\left(\frac{1}{3}x-\frac{10}{9}\right)+\left(-\frac{350}{9}x+\frac{20}{9}\right)$$

と変形できる。α, β は2次方程式 $3x^2-20x-25=0$ の2解であるから, $3\alpha^2-20\alpha-25=0$, $3\beta^2-20\beta-25=0$ が成り立つので

極大値　$f(\alpha)=(3\alpha^2-20\alpha-25)\left(\frac{1}{3}\alpha-\frac{10}{9}\right)+\left(-\frac{350}{9}\alpha+\frac{20}{9}\right)=-\frac{350}{9}\alpha+\frac{20}{9}$

極小値　$f(\beta)=(3\beta^2-20\beta-25)\left(\frac{1}{3}\beta-\frac{10}{9}\right)+\left(-\frac{350}{9}\beta+\frac{20}{9}\right)=-\frac{350}{9}\beta+\frac{20}{9}$

が成り立つ。したがって,極大値と極小値の差 $f(\alpha)-f(\beta)$ は

$$f(\alpha)-f(\beta)=\left(-\frac{350}{9}\alpha+\frac{20}{9}\right)-\left(-\frac{350}{9}\beta+\frac{20}{9}\right)$$

$$=-\frac{350}{9}(\alpha-\beta)$$

$$=-\frac{350}{9}\left(\frac{10-5\sqrt{7}}{3}-\frac{10+5\sqrt{7}}{3}\right)=-\frac{350}{9}\cdot\left(-\frac{10\sqrt{7}}{3}\right)=\frac{3500\sqrt{7}}{27}$$

極値を求める工夫に対して 3

5　　/34