数学演習（積分法）Ｈ２１．２．１６　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

１. 次の不定積分･定積分を求めよ。

(1) $\int dx$　　(2) $\int_0^2 (x^2-x)dx-\int_3^2 (x^2-x)dx$

２. 次の曲線と直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1) $y=x^2+x-2$, $y=-2x^2+4x+4$　　(2) $y=|x^2+3x-4|$, $x=0$, $x=2$, x軸

３. 曲線 $y=f(x)$ が点 $(-2, 3)$ を通り，点 $(x, f(x))$ における接線の傾きが $6x^2+2x+3$ であるとき，$f(x)$ を求めよ。

４. 等式 $\int_a^x f(t)dt=x^3+6x^2+11x+6$ を満たす $f(x)$ および，定数 a の値を求めよ。

５. 等式 $f(x)=2x^2+1+\int_0^1 xf(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

６. 放物線 $y=-x^2-4x$ と x 軸で囲まれた部分の面積を S とする。S が直線 $y=mx$ によって上側と下側に $1:7$ の面積比で分けられるとき，定数 m の値を求めよ。

７. 放物線 $y=x^2+2x+4$ について，次の各問いに答えよ。

(1) 原点から放物線に引いた２本の接線の方程式を求めよ。

(2) 放物線と２本の接線で囲まれた部分の面積を求めよ。

積分法―統一テスト―　H21. 2. 16

Class ______ No.______ Name ______ こたえ

1 次の不定積分，定積分を求めよ。

(1) $\int dx$　　(2) $\int_0^2 (x^2-x)dx - \int_3^2 (x^2-x)dx$

(1) $\int dx = \int 1\,dx$

$= x + C$

（Cは積分定数）

(2) $\int_0^2 (x^2-x)dx - \int_3^2 (x^2-x)dx$

$= \int_0^2 (x^2-x)dx + \int_2^3 (x^2-x)dx$

$= \int_0^3 (x^2-x)dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^3$

$= \frac{27}{3} - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$

2 次の曲線と直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1) $y=x^2+x-2$，$y=-2x^2+4x+4$　　(2) $y=|x^2+3x-4|$，$x=0$，$x=2$，x軸

(1) 交点は

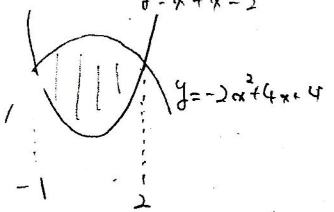
$x^2+x-2 = -2x^2+4x+4$

$3x^2-3x-6=0$

x^2-x-2

$=(x-2)(x+1)=0$

$\therefore x = 2, -1$



$\therefore$

$S = \int_{-1}^2 \{(-2x^2+4x+4)-(x^2+x-2)\}dx$

$= \int_{-1}^2 (-3x^2+3x+6)dx$

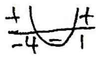
$= -3\int_{-1}^2 (x^2-x-2)dx$

$= -3\int_{-1}^2 (x+1)(x-2)dx$

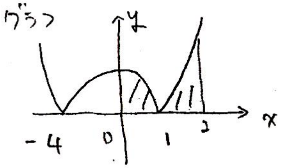
$= (-3)\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\{2-(-1)\}^3 = \frac{27}{2}$

(2) $y = x^2+3x-4$

$= (x-1)(x+4)$



グラフ



$\therefore$

$S = \int_0^1 -(x^2+3x-4)dx$

$+ \int_1^2 (x^2+3x-4)dx$

$= -\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-4x\right]_0^1$

$+ \left[\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-4x\right]_1^2$

$= -\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-4\right)$

$+\left(\frac{8}{3}+6-8\right)$

$-\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-4\right)$

$= 5$

曲線 $y=f(x)$ が点 $(-2,\ 3)$ を通り，点 $(x,\ f(x))$ における接線の傾きが $6x^2+2x+3$ であるとき，$f(x)$を求めよ。

条件より．$f(-2)=3$，$f'(x)=6x^2+2x+3$．

よって．$f(x) = \int f'(x)dx$

$= \int (6x^2+2x+3)dx$

$= 2x^3+x^2+3x+C$．

で $f(-2)=3$ より

$2(-2)^3+(-2)^2+3(-2)+C=3$

$\therefore C = 21$

ゆえに $f(x) = 2x^3+x^2+3x+21$

4 等式 $\int_a^x f(t)dt = x^3+6x^2+11x+6$ を満たす $f(x)$ および，定数 a の値を求めよ。

両辺 x で微分して

$f(x) = 3x^2+12x+11$

また．条件式において $x=a$ を代入して．

$0 = \int_a^a f(t)dt = a^3+6a^2+11a+6$

$\therefore a^3+6a^2+11a+6=0$．

$a=-1$ 代入すると（左辺）$=0$ より

$a^3+6a^2+11a+6 = (a+1)(a^2+5a+6) = (a+1)(a+2)(a+3) = 0$

$\therefore a = -1, -2, -3$

5 等式 $f(x)=2x^2+1+\int_0^1 xf(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$f(x) = 2x^2+1+x\int_0^1 f(t)dt$．$a = \int_0^1 f(t)dt$ とおく．

すると $f(x) = 2x^2+1+ax$ より $f(t) = 2t^2+1+at$．

このとき．

$a = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 (2t^2+1+at)dt$

$= \left[\frac{2}{3}t^3+t+\frac{1}{2}at^2\right]_0^1$

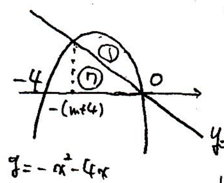
$= \frac{2}{3}+1+\frac{1}{2}a$

$\therefore a = \frac{2}{3}+1+\frac{1}{2}a$

よって $a = \frac{10}{3}$　ゆえに $f(x) = 2x^2+\frac{10}{3}x+1$

放物線 $y=-x^2-4x$ と x 軸で囲まれた部分の面積を S とする。S が直線 $y=mx$ によって上側と下側に $1:7$ の面積比で分けられるとき，定数 m の値を求めよ。

$y = -(x^2+4x) = -x(x+4)$　$\therefore y=0$ は $x=0, -4$．



放物線と x 軸で囲まれた部分の面積は

$S_1 = \int_{-4}^0 (-x^2-4x)dx$

$= -\int_{-4}^0 (x+4)x\,dx = \frac{1}{6}(0-(-4))^3 =$

放物線と $y=mx$ の交点は

$-x^2-4x = mx$ より $x^2+4x+mx=0$．

$x(x+(m+4))=0$　$\therefore x = 0, -(m+4)$

よって放物線と $y=mx$ で囲まれた部分の面積 S_2 は．

$S_2 = \int_{-(m+4)}^0 \{mx-(-x^2-4x)\}dx = \frac{1}{6}(m+4)^3$．　$S_1 = 8S_2$ より

$\frac{64}{6} = 8\cdot\frac{1}{6}(m+4)^3$．

$8 = (m+4)^3$

$2 = m+4$

$\therefore m = -2$

7 放物線 $y=x^2+2x+4$ について，次の各問いに答えよ。

(1) 原点から 放物線に引いた2本の接線の方程式を求めよ。

(2) 放物線と2本の接線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1) 接点を (t, t^2+2t+4) とおくと

この点における接線は　$(y'=2x+2)$

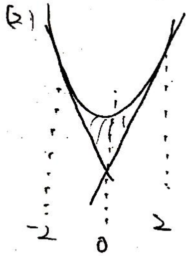
$y-(t^2+2t+4) = (2t+2)(x-t)$ となる．(※)

この接線が原点を通るので $0-(t^2+2t+4) = (2t+2)(0-t)$

整理して $t^2=4$ より $t=\pm 2$

ゆえに接線はこの値を(※)に代入して．$\begin{cases} y = 6x \\ y = -2x \end{cases}$

(2)



接線の交点のx座標は0

$S = \int_{-2}^0 \{(x^2+2x+4)-(-2x)\}dx$

$+ \int_0^2 \{(x^2+2x+4)-6x\}dx$

$= \int_{-2}^0 (x^2+4x+4)dx$

$+ \int_0^2 (x^2-4x+4)dx$

$= \int_{-2}^0 (x+2)^2dx + \int_0^2 (x-2)^2dx$

$= \left[\frac{1}{3}(x+2)^3\right]_{-2}^0 + \left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_0^2 = \frac{16}{3}$