数学演習（積分法）H２１．２．１５　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１. 次の不定積分･定積分を求めよ。

(1) $-\int dx$　　(2) $\int_0^1 (x^2-x)dx-\int_4^1 (x^2-x)dx$

２. 次の曲線と直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1) $y=-x^2+x+2$, $y=2x^2+4x-4$　　(2) $y=|x^2-3x-4|$, $x=0$, $x=-2$, x軸

３. 曲線 $y=f(x)$ が点 $(-1, 4)$ を通り，点 $(x, f(x))$ における接線の傾きが $3x^2-4x+3$ であるとき，$f(x)$ を求めよ。

４. 等式 $\int_a^x f(t)dt=x^3-2x^2-3x$ を満たす $f(x)$ および，定数 a の値を求めよ。

５. 等式 $f(x)=2x^2+1+\int_0^1 (x+1)f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

６. 放物線 $y=-x^2+4x$ と x 軸で囲まれた部分の面積を S とする。S が直線 $y=mx$ によって上側と下側に $1:7$ の面積比で分けられるとき，定数 m の値を求めよ。

７. 放物線 $y=x^2+2x+1$ について，次の各問いに答えよ。

(1) 点 $(1, 0)$ から放物線に引いた２本の接線の方程式を求めよ。

(2) 放物線と２本の接線で囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{1}$ 次の不定積分，定積分を求めよ。

(1) $-\int dx$　　(2) $\int_0^1 (x^2-x)dx - \int_4^1 (x^2-x)dx$

$-\int dx$

$= -\int 1\,dx$

$= -x + C$

$\int_0^1 (x^2-x)dx - \int_4^1 (x^2-x)dx$

$= \int_0^1 (x^2-x)dx + \int_1^4 (x^2-x)dx$

$= \int_0^4 (x^2-x)dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^4$

$= \frac{64}{3} - \frac{16}{2} = \frac{40}{3}$

$\boxed{2}$ 次の曲線と直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1) $y=-x^2+x+2$, $y=2x^2+4x-4$　　(2) $y=|x^2-3x-4|$, $x=-2$, $x=0$, x 軸

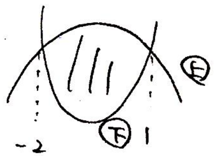
交点は

$-x^2+x+2 = 2x^2+4x-4$

$3x^2+3x-6=0$

$x^2+x-2=(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2, 1$



よって面積は

$S = \int_{-2}^{1} \{(-x^2+x+2)-(2x^2+4x-4)\}dx$

$= \int_{-2}^{1} (-3x^2-3x+6)dx$

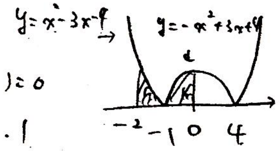
$= -3\int_{-2}^{1} (x^2+x-2)dx$

$= -3\int_{-2}^{1} (x+2)(x-1)dx$

$= -3\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\{1-(-2)\}^3 = \frac{27}{2}$

$y = x^2-3x-4 = (x-4)(x+1)$

$\therefore y=|x^2-3x-4|$ のグラフは



$\therefore$

$S = \int_{-2}^{-1} (x^2-3x-4)dx$

$+ \int_{-1}^{0} (-x^2+3x+4)dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x\right]_{-2}^{-1}$

$+ \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x\right]_{-1}^{0}$

$= \frac{17}{6} + \frac{13}{6}$

$= \frac{30}{6} = 5$

$\boxed{3}$ 曲線 $y=f(x)$ が点 $(-1,\ 4)$ を通り，点 $(x,\ f(x))$ における接線の傾きが $3x^2-4x+3$ であるとき，$f(x)$ を求めよ。

点 $(x, f(x))$ における接線の傾きが $3x^2-4x+3$

より，$f'(x) = 3x^2-4x+3$.

よって　$f(x) = x^3-2x^2+3x+C$　（C は定数）

とおける。$y=f(x)$ は点 $(-1, 4)$ を通るので

$f(-1)=4$.　$\therefore (-1)^3-2(-1)^2+3(-1)+C=4$.　$C=10$

$\therefore f(x) = x^3-2x^2+3x+10$

$\boxed{4}$ 等式 $\int_a^x f(t)dt = x^3-2x^2-3x$ を満たす $f(x)$ および，定数 a の値を求めよ。

両辺微分すると，$f(x) = 3x^2-4x-3$.

また，$\int_a^x f(t)dt = x^3-2x^2-3x$ において，

両辺 $x=a$ を代入すると，

$\int_a^a f(t)dt = a^3-2a^2-3a$.

つまり　$0 = a^3-2a^2-3a = a(a+1)(a-3)$

$\therefore a = 0, -1, 3.$

$\boxed{5}$ 等式 $f(x)=2x^2+1+\int_0^1 (x+1)f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$\int_0^1 (x+1)f(t)dt$ において，$x+1$ は t に無関係より

$f(x) = 2x^2+1+(x+1)\int_0^1 f(t)dt$ とかける。

よって　$a = \int_0^1 f(t)dt$　（a は定数）とおくと，

$f(x) = 2x^2+1+a(x+1)$ より，x に t を代入して

$f(t) = 2t^2+1+a(t+1)$

さらに，

$a = \int_0^1 (2t^2+1+a(t+1))dt$

$= \int_0^1 (2t^2+at+a+1)dt$

$= \left[\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{2}at^2+at+t\right]_0^1 = \frac{2}{3}+\frac{1}{2}a+a+1$

$\therefore a = \frac{2}{3}+\frac{1}{2}a+a+1$

より　$a = -\frac{10}{3}$

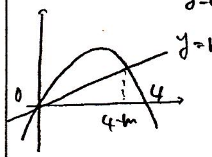
$\therefore f(x) = 2x^2+1-\frac{10}{3}(x+1)$

$= 2x^2-\frac{10}{3}x-\frac{7}{3}$

$\boxed{6}$ 放物線 $y=-x^2+4x$ と x 軸で囲まれた部分の面積を S とする。S が直線 $y=mx$ によって上側と下側に $1:7$ の面積比で分けられるとき，定数 m の値を求めよ。

$y = -x^2+4x = -x(x-4)$

$y=0$ は $x=0, 4$



$y=-x^2+4x$ と $y=mx$ で

囲まれる部分の面積は

交点が

$-x^2+4x=mx$

$x^2-4x+mx = x\{x-(4-m)\}=0$

$\therefore x=0, 4-m$

$y=-x^2+4x$ と x 軸で囲まれる

部分の面積は

$S = \int_0^4 (-x^2+4x)dx$

$= -\int_0^4 x(x-4)dx = -\frac{(-1)}{6}(4-0)^3$

$= \frac{64}{6}$

よって　$S' = \int_0^{4-m} \{(-x^2+4x)-mx\}dx$

$= -\int_0^{4-m} (x^2-4x+mx)dx$

$= -\int_0^{4-m} x\{x-(4-m)\}dx$

$= \frac{1}{6}\{(4-m)-0\}^3 = \frac{1}{6}(4-m)^3$

$S = 8S'$ より

$\frac{64}{6} = 8\cdot\frac{1}{6}(4-m)^3$

$8 = (4-m)^3$

$\therefore 2 = 4-m$　$\therefore m=2$

$\boxed{7}$ 放物線 $y=x^2+2x+1$ について，次の各問いに答えよ。

(1) $(1,0)$ から放物線に引いた2本の接線の方程式を求めよ。

(2) 放物線と2本の接線で囲まれた部分の面積を求めよ。

$y' = 2x+2$

(1)

接点を (t, t^2+2t+1) とすると，

接線の方程式は

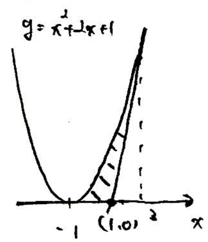
☆　$y-(t^2+2t+1) = (2t+2)(x-t)$　これが点 $(1,0)$ を通るので

$0-(t^2+2t+1) = (2t+2)(1-t)$　$\therefore t^2-2t-3=0$

$(t-3)(t+1)=0$.　$\therefore t=3, -1$.

よってこの t を☆に代入して　$\begin{cases} y=8x-8 \\ y=0 \ (x\text{軸}) \end{cases}$

(2)



$S = \int_{-1}^{1} (x^2+2x+1)dx$

$+ \int_1^3 \{(x^2+2x+1)-(8x-8)\}dx$

$= \int_{-1}^{1} (x+1)^2dx + \int_1^3 (x-3)^2dx$

$= \left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{1}{3}(x-3)^3\right]_1^3 = \frac{8}{3}+\frac{8}{3}$

$= \frac{16}{3}$