数学演習（微分法の発展問題）Ｒ１．１０．２６　　　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1　x，y，z は $x+y+z=0$，$x^2+x-1=yz$ を満たす実数とする。

(1)　x のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$P=x^3+y^3+z^3$ の最大値・最小値と，そのときの x の値を求めよ。

2　関数 $y=x^3(x-4)$ のグラフと異なる 2 点で接する直線の方程式を求めよ。

3　曲線 C：$y=x^3+3x^2+x$ と点 A$(1,\ a)$ がある。A を通って C に 3 本の接線が引けるとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{4}$ $f(x)=x^3-x$ とし，関数 $y=f(x)$ のグラフを曲線 C とする。点 $(u,\ v)$ を通る曲線 C の接線が 3 本存在するための $u,\ v$ の満たすべき条件を求めよ。また，その条件を満たす点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ。

$\boxed{5}$ a は定数とする。$x \geqq 0$ において，常に不等式 $x^3-3ax^2+4a>0$ が成り立つように a の値の範囲を定めよ。

$\boxed{6}$ t を実数の定数として，2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ を $f(x)=x^3-3x^2-9x$，$g(x)=-9x^2+27x+t$ とする。

(1)　$x \geqq 0$ を満たす任意の x に対して，$f(x) \geqq g(x)$ となる t の値の範囲を求めよ。

(2)　$x_1 \geqq 0$，$x_2 \geqq 0$ を満たす任意の x_1，x_2 に対して，$f(x_1) \geqq g(x_2)$ となる t の値の範囲を求めよ。

1 $x,\ y,\ z$ は $x+y+z=0,\ x^2+x-1=yz$ を満たす実数とする。

(1) x のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $P=x^3+y^3+z^3$ の最大値・最小値と，そのときの x の値を求めよ。

解答　(1) $-2\leqq x\leqq\dfrac{2}{3}$　　(2) $x=-1$ のとき最大値 3，$x=-2$ のとき最小値 -6

解説

(1) $z=-(x+y)$ を第 2 式に代入して　$x^2+x-1=-y(x+y)$

整理すると　$y^2+xy+x^2+x-1=0$ ……①

y は実数であるから，① の判別式を D とすると　$D\geqq 0$

ここで　$D=x^2-4\cdot 1\cdot(x^2+x-1)=-3x^2-4x+4$

よって　$-3x^2-4x+4\geqq 0$　　ゆえに　$3x^2+4x-4\leqq 0$

よって　$(x+2)(3x-2)\leqq 0$　　したがって　$-2\leqq x\leqq\dfrac{2}{3}$ ……②

(2) $P=x^3+y^3+z^3=x^3+(y+z)^3-3yz(y+z)$

$=x^3+(-x)^3-3(x^2+x-1)\cdot(-x)=3x^3+3x^2-3x$

$f(x)=3x^3+3x^2-3x$ とすると

$f'(x)=9x^2+6x-3=3(x+1)(3x-1)$

② の範囲における $f(x)$ の増減表は，右のようになるから

$x=-1$ のとき最大値 3，

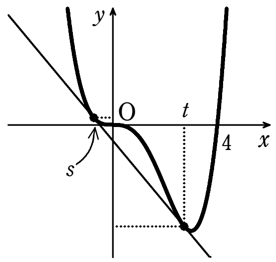
$x=-2$ のとき最小値 -6

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-6	↗	3	↘	$-\frac{5}{9}$	↗	$\frac{2}{9}$

2 関数 $y=x^3(x-4)$ のグラフと異なる 2 点で接する直線の方程式を求めよ。

解答　$y=-8x-4$

解説



$y=x^3(x-4)$ のグラフと直線 $y=mx+n$ が $x=s,\ x=t\ (s\neq t)$ の点で接するとすると，次の x の恒等式が成り立つ。

$x^3(x-4)-(mx+n)=(x-s)^2(x-t)^2$

(左辺)$=x^4-4x^3-mx-n$

(右辺)$=\{(x-s)(x-t)\}^2=\{x^2-(s+t)x+st\}^2$

$=x^4+(s+t)^2x^2+s^2t^2$

$-2(s+t)x^3-2(s+t)stx+2stx^2$

$=x^4-2(s+t)x^3+\{(s+t)^2+2st\}x^2-2(s+t)stx+s^2t^2$

両辺の係数を比較して

$-4=-2(s+t)$ ……①，　$0=(s+t)^2+2st$ ……②，

$-m=-2(s+t)st$ ……③，　$-n=s^2t^2$ ……④

① から　$s+t=2$　　これと② から　$st=-2$

③ から　$m=-8$　　④ から　$n=-4$

$s,\ t$ は $u^2-2u-2=0$ の解で，これを解くと　$u=1\pm\sqrt{3}$

よって，$y=x^3(x-4)$ のグラフと $x=1-\sqrt{3},\ x=1+\sqrt{3}$ の点で接する直線があり，その方程式は　$y=-8x-4$

別解　$y'=4x^3-12x^2$ であるから，点 $(t,\ t^3(t-4))$ における接線の方程式は

$y-t^3(t-4)=(4t^3-12t^2)(x-t)$　すなわち　$y=(4t^3-12t^2)x-3t^4+8t^3$ ……(＊)

この直線が $x=s\ (s\neq t)$ の点で $y=x^3(x-4)$ のグラフと接するための条件は，方程式 $x^4-4x^3=(4t^3-12t^2)x-3t^4+8t^3$ が t と異なる重解 s をもつことである。

これを変形して　$(x-t)^2\{x^2+2(t-2)x+3t^2-8t\}=0$

よって，$x^2+2(t-2)x+3t^2-8t=0$ ……[A]　が，t と異なる重解 s をもてばよい。

[A] の判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=(t-2)^2-1\cdot(3t^2-8t)=-2(t^2-2t-2)$

$D=0$ とすると　$t^2-2t-2=0$　　これを解くと　$t=1\pm\sqrt{3}$

このとき，[A] の重解は　$s=-(t-2)=1\mp\sqrt{3}$（複号同順）

よって，$s\neq t$ である。

$t=1\pm\sqrt{3}$ は $t^2-2t-2=0$ を満たし　$4t^3-12t^2=4(t^2-2t-2)(t-1)-8=-8$

$-3t^4+8t^3=-(t^2-2t-2)(3t^2-2t+2)-4=-4$

ゆえに，(＊) から　$y=-8x-4$

3 曲線 $C:y=x^3+3x^2+x$ と点 A $(1,\ a)$ がある。A を通って C に 3 本の接線が引けるとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

解答　$-3<a<5$

解説

$y'=3x^2+6x+1$ であるから，曲線 C 上の点 $(t,\ t^3+3t^2+t)$ における接線の方程式は

$y-(t^3+3t^2+t)=(3t^2+6t+1)(x-t)$

すなわち　$y=(3t^2+6t+1)x-2t^3-3t^2$

この接線が点 $(1,\ a)$ を通るとすると

$-2t^3+6t+1=a$ ……①

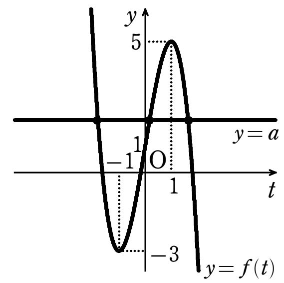
$f(t)=-2t^3+6t+1$ とすると

$f'(t)=-6t^2+6=-6(t+1)(t-1)$

$f'(t)=0$ とすると　$t=\pm 1$

$f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	↘	極小 -3	↗	極大 5	↘



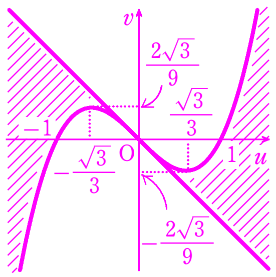
3 次関数のグラフでは，接点が異なると接線が異なるから，t の 3 次方程式 ① が異なる 3 個の実数解をもつとき，点 A から曲線 C に 3 本の接線が引ける。

したがって，曲線 $y=f(t)$ と直線 $y=a$ が異なる 3 点で交わる条件を求めて

$-3<a<5$

$\boxed{4}$ $f(x)=x^3-x$ とし，関数 $y=f(x)$ のグラフを曲線 C とする。点 $(u,\ v)$ を通る曲線 C の接線が 3 本存在するための $u,\ v$ の満たすべき条件を求めよ。また，その条件を満たす点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ。

解答　$(u+v)(-u^3+u+v)<0$,
　[図] 境界線を含まない



解説

$f'(x)=3x^2-1$ であるから，曲線 C 上の点の座標を $(t,\ f(t))$ とすると，接線の方程式は

$$y-(t^3-t)=(3t^2-1)(x-t)$$

すなわち　$y=(3t^2-1)x-2t^3$

この接線が点 $(u,\ v)$ を通るとすると　$v=(3t^2-1)u-2t^3$

よって　$2t^3-3ut^2+u+v=0$　…… ①

3 次関数のグラフでは，接点が異なれば接線も異なる。

ゆえに，点 $(u,\ v)$ を通る C の接線が 3 本存在するための条件は，t の 3 次方程式 ① が異なる 3 個の実数解をもつことである。

よって，$g(t)=2t^3-3ut^2+u+v$ とすると，$g(t)$ は極値をもち，極大値と極小値が異符号となる。

$g'(t)=6t^2-6ut=6t(t-u)$ であるから　$u\neq 0$　かつ　$g(0)g(u)<0$

$g(0)g(u)<0$ から　$(u+v)(-u^3+u+v)<0$　…… ②

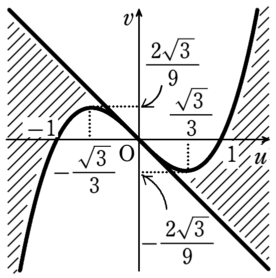
② で $u=0$ とすると $v^2<0$ となり，これを満たす実数 v は存在しない。ゆえに，条件 $u\neq 0$ は ② に含まれるから，求める条件は ② である。

② から　$\begin{cases} u+v>0 \\ -u^3+u+v<0 \end{cases}$　または　$\begin{cases} u+v<0 \\ -u^3+u+v>0 \end{cases}$

よって　$\begin{cases} v>-u \\ v<u^3-u \end{cases}$　または　$\begin{cases} v<-u \\ v>u^3-u \end{cases}$

したがって，点 $(u,\ v)$ の存在範囲は右の図の斜線部分。

境界線を含まない。



$\boxed{5}$ a は定数とする。$x\geqq 0$ において，常に不等式 $x^3-3ax^2+4a>0$ が成り立つように a の値の範囲を定めよ。

解答　$0<a<1$

解説

$f(x)=x^3-3ax^2+4a$ とすると　$f'(x)=3x^2-6ax=3x(x-2a)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=0,\ 2a$

求める条件は，次のことを満たす a の値の範囲である。

「$x\geqq 0$ における $f(x)$ の最小値が正である」 …… ①

[1]　$2a<0$　すなわち　$a<0$ のとき

$x\geqq 0$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	…
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	$4a$	↗

① を満たすための条件は　$4a>0$

したがって　$a>0$

これは $a<0$ に適さない。

[2]　$2a=0$　すなわち　$a=0$ のとき

$f'(x)=3x^2\geqq 0$ で，$f(x)$ は常に単調に増加する。

① を満たすための条件は　$f(0)=4a>0$　よって　$a>0$

これは $a=0$ に適さない。

[3]　$2a>0$　すなわち　$a>0$ のとき

$x\geqq 0$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	…	$2a$	…
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$4a$	↘	$-4a^3+4a$	↗

①を満たすための条件は

$$-4a^3+4a>0$$

ゆえに　$-4a(a+1)(a-1)>0$

よって　$a(a+1)(a-1)<0$

これを解くと　$a<-1,\ 0<a<1$

$a>0$ を満たすものは　$0<a<1$

[1]～[3] から，求める a の値の範囲は　$0<a<1$

$\boxed{6}$ t を実数の定数として，2 つの関数 $f(x),\ g(x)$ を $f(x)=x^3-3x^2-9x$, $g(x)=-9x^2+27x+t$ とする。

(1)　$x\geqq 0$ を満たす任意の x に対して，$f(x)\geqq g(x)$ となる t の値の範囲を求めよ。

(2)　$x_1\geqq 0,\ x_2\geqq 0$ を満たす任意の $x_1,\ x_2$ に対して，$f(x_1)\geqq g(x_2)$ となる t の値の範囲を求めよ。

解答　(1)　$t\leqq -40$　(2)　$t\leqq -\frac{189}{4}$

解説

(1)　$F(x)=f(x)-g(x)$ とすると　$F(x)=x^3+6x^2-36x-t$

$x\geqq 0$ を満たす任意の x に対して $F(x)\geqq 0$ となる t の値の範囲を求めればよい。

$$F'(x)=3x^2+12x-36=3(x^2+4x-12)$$
$$=3(x-2)(x+6)$$

$F'(x)=0$ とすると　$x=2,\ -6$

$x\geqq 0$ における $F(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	0	…	2	…
$F'(x)$		$-$	0	$+$
$F(x)$	$-t$	↘	$-40-t$	↗

よって，$F(x)$ は $x\geqq 0$ において，$x=2$ のとき最小値 $-40-t$ をとる。

ゆえに，求める t の値の範囲は，$-40-t\geqq 0$ を解いて　$t\leqq -40$

(2)　条件を満たすのは，$x\geqq 0$ において，

$$[f(x)\text{ の最小値}]\geqq[g(x)\text{ の最大値}]$$

となるときである。

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)=3(x+1)(x-3)$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-1,\ 3$

$x\geqq 0$ における $f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	0	…	3	…
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↘	-27	↗

よって，$f(x)$ は $x\geqq 0$ において，$x=3$ のとき最小値 -27 をとる。

また　$g(x)=-9x^2+27x+t=-9\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+t+\frac{81}{4}$

よって，$g(x)$ は $x\geqq 0$ において，$x=\frac{3}{2}$ のとき最大値 $t+\frac{81}{4}$ をとる。

ゆえに，求める t の値の範囲は，$-27\geqq t+\frac{81}{4}$ を解いて　$t\leqq -\frac{189}{4}$