数学演習（微分法）

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

１．点 $(2,\ -2)$ から，曲線 $y=\frac{1}{3}x^3-x$ に引いた接線の方程式を求めよ。

２．3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が $x=0$ で極大値 2 をとり，$x=2$ で極小値 -6 をとるとき，定数 a，b，c，d の値を求めよ。

３．曲線 C : $y=x^3+3x^2+x$ と点 A $(1,\ a)$ がある。A を通って C に 3 本の接線が引けるとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

４．$f(x)=ax^{n+1}+bx^n+1$ (n は自然数) が $(x-1)^2$ で割り切れるように，定数 a，b の値を定めよ。

５．a を定数とする。関数 $f(x)=2x^3-3(a+2)x^2+12ax$ が極値をもつとき

(1)　a が満たすべき条件を求めよ。

(2)　$f(x)$ の極大値が 32 となるとき，a の値を求めよ。

６．3 次関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ について

(1)　$f(x)$ が極大値と極小値の両方をもつための必要十分条件を a，b を用いて表せ。

(2)　$f(x)$ が $x=\alpha$ で極大値をとり，$x=\beta$ で極小値をとるとする。このとき，$f(\alpha)-f(\beta)$ を α，β を用いて表せ。

7．θ の関数 $f(\theta)=3\sin\theta+3\cos\theta+3\sin\theta\cos\theta+2\sin^3\theta+2\cos^3\theta$ について

(1)　$x=\sin\theta+\cos\theta$ とおくとき，$f(\theta)$ を x の式で表せ。

(2)　$0\leqq\theta<2\pi$ における $f(\theta)$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

8．(1)　関数 $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$ の $-1\leqq x\leqq 3$ における最大値と最小値を求めよ。

(2)　方程式 $x^4-4x^3-12x^2+32x+a=0$ （a は実数の定数）の実数解の個数を調べよ。

9．a は正の定数とする。関数 $f(x)=-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3}{2}ax^2-2a^2x+a^3$ の区間 $0\leqq x\leqq 2$ における最小値 $m(a)$ を求めよ。

数学演習（微分法）解答

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1．点 $(2,\ -2)$ から，曲線 $y=\dfrac{1}{3}x^3-x$ に引いた接線の方程式を求めよ。

解答　$y=-x$，$y=8x-18$

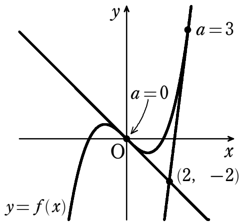
$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x$ とすると

$$f'(x)=x^2-1$$

曲線 $y=f(x)$ 上の点$(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$y-\left(\frac{1}{3}a^3-a\right)=(a^2-1)(x-a)$$

すなわち　$y=(a^2-1)x-\dfrac{2}{3}a^3$　…… ①



この直線が点 $(2,\ -2)$ を通るから

$$-2=(a^2-1)\cdot 2-\frac{2}{3}a^3$$

整理すると　$a^2(a-3)=0$　　ゆえに　$a=0,\ 3$

求める接線の方程式は，この a の値を ① に代入して

$a=0$ のとき　$y=-x$，　$a=3$ のとき　$y=8x-18$

2．3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が $x=0$ で極大値 2 をとり，$x=2$ で極小値 -6 をとるとき，定数 $a,\ b,\ c,\ d$ の値を求めよ。

解答　$a=2$，$b=-6$，$c=0$，$d=2$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$x=0$ で極大値 2 をとるから　　$f(0)=2$，$f'(0)=0$

$x=2$ で極小値 -6 をとるから　　$f(2)=-6$，$f'(2)=0$

よって　　$d=2$，$c=0$，$8a+4b+2c+d=-6$，$12a+4b+c=0$

これを解いて　　$a=2$，$b=-6$，$c=0$，$d=2$

逆に，このとき

$f(x)=2x^3-6x^2+2$　…… ①

$f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=0,\ 2$

関数 ① の増減表は右のようになり，条件を満たす。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大 2	↘	極小 −6	↗

したがって　　$a=2$，$b=-6$，$c=0$，$d=2$

3．曲線 $C : y=x^3+3x^2+x$ と点 A $(1,\ a)$ がある。A を通って C に 3 本の接線が引けるとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

解答　$-3<a<5$

$y'=3x^2+6x+1$ であるから，曲線 C 上の点 $(t,\ t^3+3t^2+t)$ における接線の方程式は

$$y-(t^3+3t^2+t)=(3t^2+6t+1)(x-t)$$

すなわち　　$y=(3t^2+6t+1)x-2t^3-3t^2$

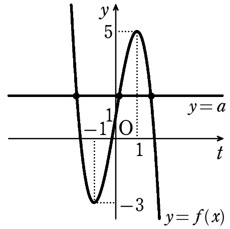
この接線が点 $(1,\ a)$ を通るとすると　　$-2t^3+6t+1=a$　…… ①

$f(t)=-2t^3+6t+1$ とすると

$$f'(t)=-6t^2+6=-6(t+1)(t-1)$$

$f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	$\cdots$	−1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	−	0	+	0	−
$f(t)$	↘	極小 −3	↗	極大 5	↘



3 次関数のグラフでは，接点が異なると接線が異なるから，t の 3 次方程式 ① が異なる 3 つの実数解をもつとき，点 A から曲線 C に 3 本の接線が引ける。

したがって，曲線 $y=f(t)$ と直線 $y=a$ が異なる 3 点で交わる条件を求めて

$$-3<a<5$$

4．$f(x)=ax^{n+1}+bx^n+1$（n は自然数）が $(x-1)^2$ で割り切れるように，定数 $a,\ b$ の値を定めよ。

解答　$a=n$，$b=-n-1$

$f(x)=ax^{n+1}+bx^n+1$，$f'(x)=(n+1)ax^n+nbx^{n-1}$

$f(x)$ が $(x-1)^2$ で割り切れるための条件は

$$f(1)=0\quad かつ\quad f'(1)=0$$

$f(1)=0$ から　　$a+b+1=0$　　…… ①

$f'(1)=0$ から　　$(n+1)a+nb=0$　…… ②

②−①×n から　　　$a=n$

これを ① に代入して　　$b=-n-1$

5．a を定数とする。関数 $f(x)=2x^3-3(a+2)x^2+12ax$ が極値をもつとき

(1)　a が満たすべき条件を求めよ。

(2)　$f(x)$ の極大値が 32 となるとき，a の値を求めよ。

解答　(1)　$a\neq 2$　　(2)　$a=-2,\ \dfrac{10}{3}$

(1)　$f'(x)=6x^2-6(a+2)x+12a=6\{x^2-(a+2)x+2a\}=6(x-2)(x-a)$

$f(x)$ が極値をもつための条件は，$f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことである。

$f'(x)=0$ とすると　　　$x=2,\ a$

よって，求める条件は　　$a\neq 2$

(2)　[1]　$a<2$ のとき

$f(x)$ の増減表は右のようになり，$f(x)$ は $x=a$ で極大値 $f(a)=-a^3+6a^2$ をとる。

x	$\cdots$	a	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

したがって，求める条件は

$$-a^3+6a^2=32$$

ゆえに　　$a^3-6a^2+32=0$　　　よって　　$(a+2)(a-4)^2=0$

したがって　　$a=-2,\ 4$

$a<2$ を満たすものは　　$a=-2$

[2]　$a>2$ のとき

$f(x)$ の増減表は右のようになり，$f(x)$は $x=2$ で極大値 $f(2)=12a-8$ をとる。

x	$\cdots$	2	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

したがって，求める条件は

$$12a-8=32$$

よって　　$a=\dfrac{10}{3}$　　　　これは $a>2$ を満たす。

以上から，求める a の値は　　$a=-2,\ \dfrac{10}{3}$

6．3 次関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ について

(1)　$f(x)$ が極大値と極小値の両方をもつための必要十分条件を $a,\ b$ を用いて表せ。

(2)　$f(x)$ が $x=\alpha$ で極大値をとり，$x=\beta$ で極小値をとるとする。このとき，$f(\alpha)-f(\beta)$ を $\alpha,\ \beta$ を用いて表せ。

解答　(1)　$a^2-3b>0$　　(2)　$\dfrac{(\beta-\alpha)^3}{2}$

(1)　$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(x)$ が極大値と極小値の両方をもつための必要十分条件は，$f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことである。

よって，$f'(x)=0$ すなわち $3x^2+2ax+b=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}>0\quad すなわち\quad a^2-3b>0$$

(2)　$\alpha,\ \beta$ は 2 次方程式 $3x^2+2ax+b=0$ の 2 つの解であるから，解と係数の関係により　　$\alpha+\beta=-\dfrac{2}{3}a$，$\alpha\beta=\dfrac{b}{3}$

したがって　　$a=-\dfrac{3}{2}(\alpha+\beta)$，$b=3\alpha\beta$

よって

$$\begin{aligned}f(\alpha)-f(\beta)&=\alpha^3-\beta^3+a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta)\\&=(\alpha-\beta)\{(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+a(\alpha+\beta)+b\}\\&=(\alpha-\beta)\left\{(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)+3\alpha\beta\right\}\\&=(\alpha-\beta)\cdot\frac{-\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2}{2}=\frac{(\beta-\alpha)(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)}{2}\\&=\frac{(\beta-\alpha)^3}{2}\end{aligned}$$

7．θ の関数 $f(\theta)=3\sin\theta+3\cos\theta+3\sin\theta\cos\theta+2\sin^3\theta+2\cos^3\theta$ について

(1) $x=\sin\theta+\cos\theta$ とおくとき，$f(\theta)$ を x の式で表せ。

(2) $0\leqq\theta<2\pi$ における $f(\theta)$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

解答 (1) $f(\theta)=-x^3+\dfrac{3}{2}x^2+6x-\dfrac{3}{2}$

(2) $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\dfrac{3}{2}+4\sqrt{2}$；$\theta=\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi$ のとき最小値 -5

(1) $f(\theta)=3(\sin\theta+\cos\theta)+3\sin\theta\cos\theta+2(\sin^3\theta+\cos^3\theta)$

$x=\sin\theta+\cos\theta$ の両辺を平方すると　$x^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

ゆえに　$x^2=1+\sin\theta\cos\theta$　　よって　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{x^2-1}{2}$

したがって　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$$

$$=x\left(1-\frac{x^2-1}{2}\right)=\frac{3x-x^3}{2}$$

よって，$f(\theta)$ を x の式で表すと

$$f(\theta)=3x+3\cdot\frac{x^2-1}{2}+2\cdot\frac{3x-x^3}{2}=-x^3+\frac{3}{2}x^2+6x-\frac{3}{2}$$

(2) $x=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{9}{4}\pi$　……①

ゆえに　$-1\leqq\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq1$　　よって　$-\sqrt{2}\leqq x\leqq\sqrt{2}$　……②

$f(\theta)=g(x)$ とすると　$g(x)=-x^3+\dfrac{3}{2}x^2+6x-\dfrac{3}{2}$

$$g'(x)=-3x^2+3x+6=-3(x+1)(x-2)$$

$g'(x)=0$ とすると　$x=-1$，2

② の範囲における $g(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\dfrac{3}{2}-4\sqrt{2}$	↘	-5	↗	$\dfrac{3}{2}+4\sqrt{2}$

よって，$g(x)$ は，$x=\sqrt{2}$ で最大値 $\dfrac{3}{2}+4\sqrt{2}$，$x=-1$ で最小値 -5 をとる。

$x=\sqrt{2}$ のとき　$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$

① から　$\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$　すなわち　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

$x=-1$ のとき　$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

① から　$\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5}{4}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi$　すなわち　$\theta=\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi$

したがって，$f(\theta)$ は，

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ で最大値 $\dfrac{3}{2}+4\sqrt{2}$；$\theta=\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi$ で最小値 -5

をとる。

8．(1) 関数 $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$ の $-1\leqq x\leqq3$ における最大値と最小値を求めよ。

(2) 方程式 $x^4-4x^3-12x^2+32x+a=0$ (a は実数の定数) の実数解の個数を調べよ。

解答 (1) $x=3$ で最大値 27，$x=2$ で最小値 -32

(2) $a<-17$ のとき 2 個，$a=-17$ のとき 3 個，$-17<a<64$ のとき 4 個，$a=64$ のとき 2 個，$64<a$ のとき 0 個

(1) $f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x^2-x-2)=12x(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-1$，0，2

区間 $-1\leqq x\leqq3$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-5	↗	極大 0	↘	極小 -32	↗	27

よって　$x=3$ で最大値 27，$x=2$ で最小値 -32

(2) 与式から　$-x^4+4x^3+12x^2-32x=a$

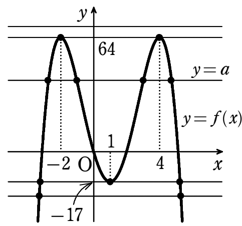
$f(x)=-x^4+4x^3+12x^2-32x$ とすると

$$f'(x)=-4x^3+12x^2+24x-32=-4(x^3-3x^2-6x+8)$$

$$=-4(x-1)(x+2)(x-4)$$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	極大 64	↘	極小 -17	↗	極大 64	↘



与式の実数解の個数は，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=a$ の共有点の個数に一致する。よって，右図から

$a<-17$ のとき 2 個，$a=-17$ のとき 3 個，

$-17<a<64$ のとき 4 個，$a=64$ のとき 2 個，

$64<a$ のとき 0 個

9．a は正の定数とする。関数 $f(x)=-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3}{2}ax^2-2a^2x+a^3$ の区間 $0\leqq x\leqq2$ における最小値 $m(a)$ を求めよ。

解答 $0<a<\dfrac{4}{5}$，$2<a$ のとき $m(a)=a^3-4a^2+6a-\dfrac{8}{3}$；

$\dfrac{4}{5}\leqq a\leqq2$ のとき $m(a)=\dfrac{a^3}{6}$

$$f'(x)=-x^2+3ax-2a^2$$

$$=-(x^2-3ax+2a^2)$$

$$=-(x-a)(x-2a)$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=a$，$2a$

$a>0$ であるから，$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	a	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小 $\dfrac{a^3}{6}$	↗	極大 $\dfrac{a^3}{3}$	↘

ここで，$x=a$ 以外に $f(x)=\dfrac{a^3}{6}$ となる x の値を求めると，$f(x)=\dfrac{a^3}{6}$ から

$$-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}ax^2-2a^2x+a^3=\frac{a^3}{6}$$

整理すると　$2x^3-9ax^2+12a^2x-5a^3=0$

ゆえに　$(x-a)^2(2x-5a)=0$　　$x\neq a$ であるから　$x=\dfrac{5}{2}a$

したがって，$f(x)$ の $0\leqq x\leqq2$ における最小値 $m(a)$ は

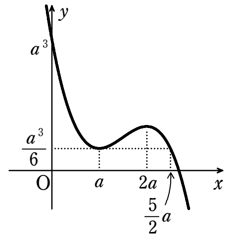
[1] $2<a$ のとき　$m(a)=f(2)=a^3-4a^2+6a-\dfrac{8}{3}$

[2] $a\leqq2\leqq\dfrac{5}{2}a$ すなわち $\dfrac{4}{5}\leqq a\leqq2$ のとき

$$m(a)=f(a)=\frac{a^3}{6}$$

[3] $0<\dfrac{5}{2}a<2$ すなわち $0<a<\dfrac{4}{5}$ のとき

$$m(a)=f(2)=a^3-4a^2+6a-\frac{8}{3}$$



以上から　$0<a<\dfrac{4}{5}$，$2<a$ のとき　$m(a)=a^3-4a^2+6a-\dfrac{8}{3}$；

$\dfrac{4}{5}\leqq a\leqq2$ のとき　$m(a)=\dfrac{a^3}{6}$