数学演習（接線の方程式）Ｒ１．１０．２３　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1．(1)　曲線 $y=x^3-x^2-2x$ 上の点 $(3,\ 12)$ における接線の方程式を求めよ。

(2)　曲線 $y=x^3+3x^2$ に接し，傾きが 9 である直線の方程式を求めよ。

2．(1)　点 $(3,\ 4)$ から，放物線 $y=-x^2+4x-3$ に引いた接線の方程式を求めよ。

(2)　点 $(2,\ 4)$ を通り，曲線 $y=x^3-3x+2$ に接する直線の方程式を求めよ。

3．曲線 $y=x^3-3x^2+2x+1$ について，次のものを求めよ。

(1)　曲線上の点 $(1,\ 1)$ における法線の方程式

(2)　(1) で求めた法線と曲線の共有点のうち，点 $(1,\ 1)$ 以外の点の座標

4．2つの放物線 $y=-x^2$，$y=x^2-2x+5$ の共通接線の方程式を求めよ。

5．2曲線 $y=x^3-2x+1$ と $y=x^2+2ax+1$ が接するとき，定数 a の値を求めよ。また，その接点における共通の接線の方程式を求めよ。

6．(1)　2曲線 $y=x^3+ax$ と $y=bx^2+c$ がともに点 $(-1,\ 0)$ を通り，この点で共通な接線をもつとき，定数 a，b，c の値を求めよ。また，その接点における共通の接線の方程式を求めよ。

(2)　2曲線 $y=x^3-x^2-12x-1$，$y=-x^3+2x^2+a$ が接するとき，定数 a の値を求めよ。また，その接点における接線の方程式を求めよ。

数学演習（接線の方程式）Ｒ１．１０．２３　　　　(　)組(　)番　名前(　　　　　　　)

１．(1)　曲線 $y=x^3-x^2-2x$ 上の点 $(3,\ 12)$ における接線の方程式を求めよ。

(2)　曲線 $y=x^3+3x^2$ に接し，傾きが 9 である直線の方程式を求めよ。

解答　(1)　$y=19x-45$　　(2)　$y=9x-5$，$y=9x+27$

解説

(1)　$f(x)=x^3-x^2-2x$ とすると　　$f'(x)=3x^2-2x-2$

ゆえに　　$f'(3)=3\cdot 3^2-2\cdot 3-2=19$

よって，点 $(3,\ 12)$ における接線の方程式は

$$y-12=19(x-3)\quad \text{すなわち}\quad y=19x-45$$

(2)　$f(x)=x^3+3x^2$ とすると　　$f'(x)=3x^2+6x$

点 $(a,\ a^3+3a^2)$ における接線の方程式は

$$y-(a^3+3a^2)=(3a^2+6a)(x-a)$$

すなわち　　$y=(3a^2+6a)x-2a^3-3a^2$　……①

この直線の傾きが 9 であるとすると　　$3a^2+6a=9$

整理して　　$a^2+2a-3=0$　　　ゆえに　　$(a-1)(a+3)=0$

したがって　　$a=1,\ -3$

① から　　$a=1$ のとき　$y=9x-5$，　$a=-3$ のとき　$y=9x+27$

よって，求める直線の方程式は　　$y=9x-5$，$y=9x+27$

２．(1)　点 $(3,\ 4)$ から，放物線 $y=-x^2+4x-3$ に引いた接線の方程式を求めよ。

(2)　点 $(2,\ 4)$ を通り，曲線 $y=x^3-3x+2$ に接する直線の方程式を求めよ。

解答　(1)　$y=2x-2$，$y=-6x+22$　　(2)　$y=4$，$y=9x-14$

解説

(1)　$f(x)=-x^2+4x-3$ とすると　　$f'(x)=-2x+4$

放物線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$y-(-a^2+4a-3)=(-2a+4)(x-a)$$

すなわち　　$y=-2(a-2)x+a^2-3$　……①

この直線が点 $(3,\ 4)$ を通るから　　$4=-2(a-2)\cdot 3+a^2-3$

整理すると　　$a^2-6a+5=0$

ゆえに　　$(a-1)(a-5)=0$　　　よって　　$a=1,\ 5$

求める接線の方程式は，a の値を ① に代入して

$a=1$ のとき　$y=2x-2$，　$a=5$ のとき　$y=-6x+22$

(2)　$f(x)=x^3-3x+2$ とすると　$f'(x)=3x^2-3$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$y-(a^3-3a+2)=(3a^2-3)(x-a)$$

すなわち　　$y=(3a^2-3)x-2a^3+2$　……①

この直線が点 $(2,\ 4)$ を通るから　　$4=(3a^2-3)\cdot 2-2a^3+2$

整理すると　　$a^3-3a^2+4=0$　　　ゆえに　　$(a+1)(a-2)^2=0$

よって　　$a=-1,\ 2$

求める接線の方程式は，a の値を ① に代入して

$a=-1$ のとき　$y=4$，　$a=2$ のとき　$y=9x-14$

３．曲線 $y=x^3-3x^2+2x+1$ について，次のものを求めよ。

(1)　曲線上の点 $(1,\ 1)$ における法線の方程式

(2)　(1) で求めた法線と曲線の共有点のうち，点 $(1,\ 1)$ 以外の点の座標

解答　(1)　$y=x$　　(2)　$(1+\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2})$，$(1-\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2})$

解説

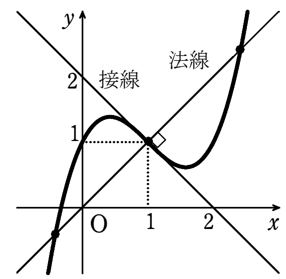
(1)　$f(x)=x^3-3x^2+2x+1$ とすると　　$f'(x)=3x^2-6x+2$

よって，点 $(1,\ 1)$ における接線の傾きは　　$f'(1)=3\cdot 1^2-6\cdot 1+2=-1$

ゆえに，法線の傾きは 1 である。

したがって，求める法線の方程式は　　$y-1=1\cdot(x-1)$　すなわち　$y=x$

(2)　求める共有点の x 座標は，次の方程式の $x=1$ 以外の実数解である。



$$x^3-3x^2+2x+1=x$$

整理して　　$x^3-3x^2+x+1=0$

よって　　$(x-1)(x^2-2x-1)=0$

したがって，求める点の x 座標は，

$x^2-2x-1=0$ を解いて　　$x=1\pm\sqrt{2}$

ゆえに，求める共有点の座標は

$$(1+\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}),\ (1-\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2})$$

4．2 つの放物線 $y=-x^2$，$y=x^2-2x+5$ の共通接線の方程式を求めよ。

解答　$y=2x+1$，$y=-4x+4$

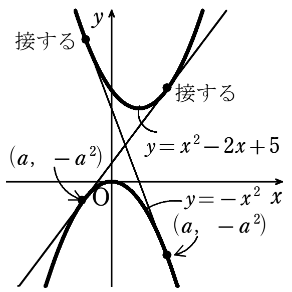
解説

$y=-x^2$ に対して　　$y'=-2x$

よって，放物線 $y=-x^2$ 上の点 $(a,\ -a^2)$ における接線の方程式は

$$y-(-a^2)=-2a(x-a)$$

すなわち　　$y=-2ax+a^2$　…… ①



この直線が放物線 $y=x^2-2x+5$ にも接するための条件は，2 次方程式

$x^2-2x+5=-2ax+a^2$　すなわち

$x^2+2(a-1)x-a^2+5=0$ …… ② が重解をもつことである。

ゆえに，② の判別式を D とすると　　$D=0$

$$\frac{D}{4}=(a-1)^2-1\cdot(-a^2+5)=2a^2-2a-4=2(a+1)(a-2)$$

よって　　$(a+1)(a-2)=0$　　　ゆえに　　$a=-1,\ 2$

この値を ① に代入して，求める共通接線の方程式は　$y=2x+1$，$y=-4x+4$

5．2 曲線 $y=x^3-2x+1$ と $y=x^2+2ax+1$ が接するとき，定数 a の値を求めよ。また，その接点における共通の接線の方程式を求めよ。

解答　$a=-1$ のとき　$y=-2x+1$，$a=-\frac{9}{8}$ のとき　$y=-\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}$

解説

$f(x)=x^3-2x+1$，$g(x)=x^2+2ax+1$ とすると

$$f'(x)=3x^2-2,\quad g'(x)=2x+2a$$

2 曲線が $x=p$ の点で接するための条件は

$$f(p)=g(p),\quad f'(p)=g'(p)$$

よって　　$p^3-2p+1=p^2+2ap+1$　　…… ①

　　　　$3p^2-2=2p+2a$　　　　…… ②

② から　　$2a=3p^2-2p-2$　　　　…… ③

これを ① に代入して　　$p^3-2p+1=p^2+(3p^2-2p-2)p+1$

ゆえに　　$p^2(2p-1)=0$　　　よって　　$p=0,\ \frac{1}{2}$

③ から　　$p=0$ のとき　$a=-1$，　$p=\frac{1}{2}$ のとき　$a=-\frac{9}{8}$

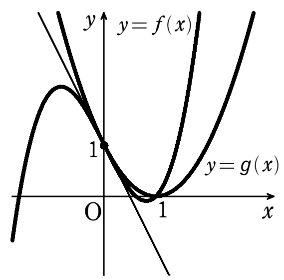
曲線 $y=f(x)$ 上の点 $x=p$ における接線の方程式は

$y-(p^3-2p+1)=(3p^2-2)(x-p)$　すなわち　$y=(3p^2-2)x-2p^3+1$

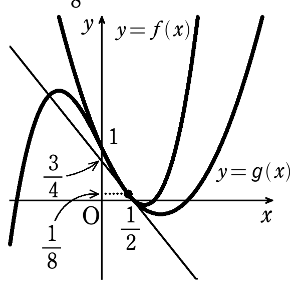
ゆえに，求める接線の方程式は

$a=-1$ $(p=0)$ のとき　$y=-2x+1$，　$a=-\frac{9}{8}$ $\left(p=\frac{1}{2}\right)$ のとき　$y=-\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}$

$a=-1$ のとき



$a=-\frac{9}{8}$ のとき



6．(1)　2 曲線 $y=x^3+ax$ と $y=bx^2+c$ がともに点 $(-1,\ 0)$ を通り，この点で共通な接線をもつとき，定数 a，b，c の値を求めよ。また，その接点における共通の接線の方程式を求めよ。

(2)　2 曲線 $y=x^3-x^2-12x-1$，$y=-x^3+2x^2+a$ が接するとき，定数 a の値を求めよ。また，その接点における接線の方程式を求めよ。

解答　(1)　$a=-1$，$b=-1$，$c=1$；$y=2x+2$

(2)　$a=6$ のとき $y=-7x+2$，$a=-21$ のとき $y=-4x-13$

解説

(1)　$f(x)=x^3+ax$，$g(x)=bx^2+c$ とすると

$$f'(x)=3x^2+a,\quad g'(x)=2bx$$

2 曲線が点 $(-1,\ 0)$ を通り，この点で共通な接線をもつから

$$f(-1)=g(-1)=0,\quad f'(-1)=g'(-1)$$

よって　　$-1-a=0$，$b+c=0$，$3+a=-2b$

これを解くと　　$a=-1$，$b=-1$，$c=1$

このとき，$f'(x)=3x^2-1$ から　　$f'(-1)=2$

ゆえに，点 $(-1,\ 0)$ における共通の接線の方程式は

$y=2(x+1)$　すなわち　$y=2x+2$

(2)　$f(x)=x^3-x^2-12x-1$，$g(x)=-x^3+2x^2+a$ とすると

$$f'(x)=3x^2-2x-12,\quad g'(x)=-3x^2+4x$$

2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $x=p$ の点で接するための条件は

$$f(p)=g(p),\quad f'(p)=g'(p)$$

よって　　$p^3-p^2-12p-1=-p^3+2p^2+a$，$3p^2-2p-12=-3p^2+4p$

それぞれ整理して　　$a=2p^3-3p^2-12p-1$　…… ①，

　　　　　　　　　$p^2-p-2=0$　　　　…… ②

② から　　$(p+1)(p-2)=0$　　　ゆえに　　$p=-1,\ 2$

① から　　$p=-1$ のとき　$a=6$，　$p=2$ のとき　$a=-21$

曲線 $y=x^3-x^2-12x-1$ 上の点 $x=p$ における接線の方程式は

$$y-(p^3-p^2-12p-1)=(3p^2-2p-12)(x-p)$$

すなわち　$y=(3p^2-2p-12)x-2p^3+p^2-1$

求める接線の方程式は　　$a=6$ $(p=-1)$ のとき　　$y=-7x+2$，

　　　　　　　　　　　$a=-21$ $(p=2)$ のとき　　$y=-4x-13$